

VECKANS PROBLEM

PROBLEM 3 (lösningen skall vara klar tors 28/9)

Låt $f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right)$.

Bestäm D_f . Är f kontinuerlig? Var är f deriverbar? Beräkna $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Har f ett gränsvärde då x går mot 0? Rita kurvan $y = f(x)$ med angivandet av extrempunkter och asymptoter. Ange även V_f .

Lösningsförslag till VP2

- 1) Nå??? (hur kommer man från första n :et ($n=0$) till nästa ($n=1$) ???)
- 2) Nej. Vi visar det genom att visa att för godtyckliga $m, n \in \mathbb{N}$, ej bägge 0, utsagan $\neg P: m\sqrt{2} + n\sqrt{3} \in \mathbb{D}$ är falsk (då måste $P: m\sqrt{2} + n\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$ vara sann, ty $\neg P \Rightarrow f$ är sann om och endast om P är sann): Låt $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n \neq 0$:

$$m\sqrt{2} + n\sqrt{3} \in \mathbb{D} \Rightarrow (m\sqrt{2} + n\sqrt{3})^2 = 2m^2 + 3n^2 + 2mn\sqrt{6} \in \mathbb{D} \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{D}_{m \cdot n \neq 0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p}{k}, p, k \in \mathbb{N}, k \neq 0 \text{ och } p \text{ och } k \text{ har ingen gemensam delare}$$

$$\Rightarrow 6k^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ är delbart med } 3 \Rightarrow p \text{ är delbart med } 3 \text{ (visat på föreläsningen!)} \Rightarrow p = 3q, q \in \mathbb{N} \Rightarrow 6k^2 = 9q^2 \Rightarrow 2k^2 = 3q^2 \Rightarrow k^2 \text{ är delbart med } 3 \Rightarrow k \text{ är delbart med } 3 \text{ och det är ju falskt (motsägelse till att } p \text{ och } k \text{ inte skall ha någon gemensam delare).}$$

vsv

EXTRAUPPGIFTER

- 1) Visa entydigheten av gränsvärdet: $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \right) \Rightarrow (A = B)$.
- 2) Visa fixpunktsatsen:
 Om $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ är kontinuerlig med $D_f = [0, 1]$ så finns det en punkt $x_0 \in [0, 1]$ så att $f(x_0) = x_0$ (en så dan punkt kallas *fixpunkt* till f).
- 3) Emil och Emilia har gjort en smörgås: en rund brödskiva med schweizerost på (den där med många hål). Kan de dela mackan med ett rakt snitt så att bägge får lika mycket bröd och lika mycket ost? (svar: teoretiskt ja, visa det! I praktiken nej (visa inte det)).

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 2000

Moment 2: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet, elementära funktioner

1. Kan du skriva upp definitionerna för $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$,
 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$, då $x \rightarrow a$ ($a \pm, \pm\infty$) ?
2. Vilka "gränsvärdesregler" användes i exempel 1 (sid. 2:04) ?
Kan du visa gränsvärdesreglarna?
3. Vad är en kontinuerlig funktion? Varför är kontinuitet en så viktig egenskap?
4. Vad är en deriverbar funktion? Är en kontinuerlig funktion deriverbar?
Är en deriverbar funktion kontinuerlig?
5. Stämmer påståendet: $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f'(x) \Rightarrow f$ deriverbar i a ?
6. Kan du (formulera och visa) deriveringsreglerna?
7. Vad ger $f'(a)$? Kan du skriva upp en ekvation för tangenten?
8. Vad är en injektiv funktion? Vad är f^{-1} ? Kan du derivera f^{-1} och visa din formel?
9. Vad är lokala extrempunkter (lokala maxima/minima) ?
Hur kan du eventuellt hitta dem m.h.a. derivatan?
10. Vad är en stationär punkt? Är stationära punkter (lok) extrempunkter?
11. Kan du (formulera, visa) Rolles och Lagranges sats?
Vilka tillämpningar har Lagranges sats?
12. Vad menas med att en funktion är växande/avtagande, konvex/konkav?
Hur kan du eventuellt m.h.a. derivatan avgöra om en funktion är växande/avtagande,
resp. konvex/konkav? Injektiv? Är en strängt konvex funktion injektiv? Deriverbar?
13. Hur definieras funktionerna
 $\ln x, e^x, x^a, \sin x, \cos x, \tan x, \sinh x, \cosh x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x$?
Kan du härleda derivatorna till dessa funktioner?
14. Kan du standardgränsvärdena (kan du visa dem)
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$?