

VECKANS PROBLEM

PROBLEM 4 (lösningen skall vara klar tors 5/10)

- 1) Låt $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig på $[0, \infty)$. Visa att f är injektiv på $[1, \infty)$. Är f injektiv i intervallet $(0, 1)$?
- 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$.
- a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?
- b) Visa att f är injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$ och beräkna $D(f^{-1})(\frac{9}{2\pi^2})$.
- c) Visa att f är strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$.

Lösningsförslag till VP3

$D_f = \{x : x \neq 0 \wedge x \leq 1 \wedge 2x \leq 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$. Eftersom f är sammansatt av kontinuerliga funktioner så är f kontinuerlig (på hela D_f alltså), vidare är f deriverbar i $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, ty f är sammansatt av funktioner som är deriverbara i alla inre punkter i D_f . För att lättare kunna beräkna gränsvärdena och derivatan skriver vi om f (ändamålsenligt):

$$f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right) = \frac{\sqrt{1-x} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}}, & \text{då } x > 0 \\ -\frac{\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}, & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

[obs: $\sqrt{x^2} = -x$ då $x < 0$!] Detta ger att $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{1}{2}$, f saknar alltså

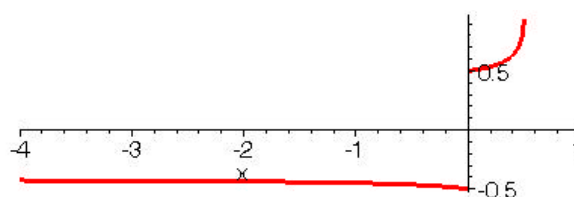
gränsvärde då x går mot 0. Vidare är för $x < 0$ $f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{-\frac{1}{x} + 2}{-\frac{1}{x} + 1}}}$, det ger att

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$, linjen $y = 1 - \sqrt{2}$ är alltså asymptot då $x \rightarrow -\infty$. För $x > 0$ är

$$f'(x) = \frac{\frac{-(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \right)}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-2x}(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2} > 0,$$

och för $x < 0$ är därmed $f'(x) < 0$ (minustecken!). Detta visar att $f(\frac{1}{2}) = 1$ är f 's största värde och s.o.m.v. ger att f antar alla värden (strängt) mellan $1 - \sqrt{2}$ och $-\frac{1}{2}$ och mellan $\frac{1}{2}$ och 1. Därmed har vi bestämt $V_f = (-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$.

[obs: $1 - \sqrt{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$. Grafen:



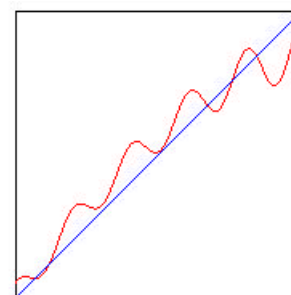
Den här uppgiften (vp4) lämpar sig utmärkt för långa lärorika diskussioner. Ta den riktigt på allvar. Den innehåller för det första en massa frågor, t.ex. (uppg1) är f kontinuerlig? Aha, kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd, och den är ju hela $\tilde{N}$; det blir troligtvis olika motiveringar för $x \neq 0$ resp $x = 0$, sak samma för deriverbar och för kontinuitet av f' ; men för att se om f är deriverbar i 0 hjälper det inte att betrakta f' (varför inte??), utan vad måste göras?

Vad är injektiv? Vad är f^{-1} (f -invers, inte " f upphöjd till -1 " !!)....

För det andra innehåller den utöver nyttiga räkningar och deriveringar träning att framställa dina tankar, att formulera, att skriva ner. I uppg2 inser du troligtvis snabbt hur det ligger till, men det är inte så självklart hur du skall visa det (enbart satser som visats visats på föreläsningen får användas!). Gör en riktigt bra, utförlig lösning (tenta-uppgift)!

Lösning av extrauppgift 2 (bevis av fixpunktsatsen)

Åskådligt är det väl klart: Eftersom f är kontinuerlig och $0 \leq f(x) \leq 1$ så borde väl kurvan $y = f(x)$ någonstans korsa linjen $y = x$. Ett strängt bevis för det får vi genom att betrakta funktionen $g(x) = f(x) - x$: g är kontinuerlig på $[0,1]$. Om $g(0) = 0$ eller $g(1) = 0$ så är vi färdiga (0 eller 1 är fixpunkt då); om $g(0) \neq 0$ och $g(1) \neq 0$ så är $g(0) > 0$ och $g(1) < 0$, värdet 0 ligger alltså mellan värdena $g(0)$ och $g(1)$, enligt satsen om mellanliggande värden finns det då ett $x_0 \in [0,1]$ (i själva verket $x_0 \in (0,1)$) där g antar värdet 0, dvs. $f(x_0) = x_0$.



vsv

EXTRAUPPGIFTER

1) Låt $f(x) = \ln \sqrt{x^{x^2}}$ ($x > 0$).

Visa att $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} x^{2-n} (n-3)!$ för alla $3 \leq n \in \mathbb{N}$.

2) Visa att $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$ för $0 < a < b < \pi$.

3) Visa att för positiva x gäller: $2^x < x^2 \Leftrightarrow 2 < x < 4$ (det ger t.ex. $2^e < e^2$).

4) Visa att $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$, $D_f = (0, \frac{\pi}{2})$, är injektiv, bestäm värdemängden V_f ,

och $D(f^{-1})(\frac{3}{2\pi})$.

svar: $(0, \frac{2}{\pi}), \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi-\sqrt{3})}$

5) Låt $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.

Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?

Rita kurvan $y = f(x)$ med angivandet av asymptoter och konvexitet/konkavitet.