

VECKANS PROBLEM

Lösningsförslag till VP4

- 1) $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3}$ är kontinuerlig i varje punkt $x > 0$, ty f är sammansatt av funktioner som är kontinuerliga i $(0, \infty)$, men f är kontinuerlig även i 0, ty
- $$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \sqrt{x} \ln x + \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} + \frac{7}{3} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = f(0) \text{ (standardgränsvärden och } \sqrt{\cdot} \text{ är kontinuerlig!)}.$$
- Vidare är för $x > 1$ $f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) + \frac{\sqrt{x} \cos x - \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{7}{6\sqrt{x}} =$
- $$= \frac{x \ln x + 2x + 6x \cos x - 3 \sin x + 7x}{6x\sqrt{x}} = \frac{x \ln x + 6x(1 + \cos x) + 3(x - \sin x)}{6x\sqrt{x}} > 0$$
- ty varje summand i täljaren är > 0 . Alltså är f strängt växande i $(1, \infty)$ och därmed injektiv på $[1, \infty)$. Till sist: $f' \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0+$, det finns alltså ett $\delta > 0$ så att $f'(x) < -1$ för alla $x \in (0, \delta)$; f är alltså strängt avtagande i $[0, \delta]$, och därmed $f(\delta) < f(\frac{\delta}{2}) < 0$. Men eftersom f är kontinuerlig på $[\delta, 1]$ och $f(1) > 0$, så gers.o.m.v. att f antar värdet $f(\frac{\delta}{2})$ även i någon punkt $x_0 \in [\delta, 1]$, alltså är f ej injektiv på $(0, 1)$ (värdet $f(\frac{\delta}{2})$ antas i $(0, \delta)$ och i $(\delta, 1)$). Du ritar grafen i labben!

- 2) a) f är deriverbar och därmed kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ och $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ ty f och f' är där sammansatta av deriverbara funktioner $(\cos(x), \frac{1}{x}, \sin(x) \dots)$. Då undersöker vi om f är deriverbar i 0, d.v.s. om $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ har ett gränsvärde då Δx går mot 0:

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x} \right| = |x \cos \frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

instängningslagen ger då att $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ existerar, d.v.s. att f

är deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$. Därmed är f även kontinuerlig i 0 (visa detta direkt!).

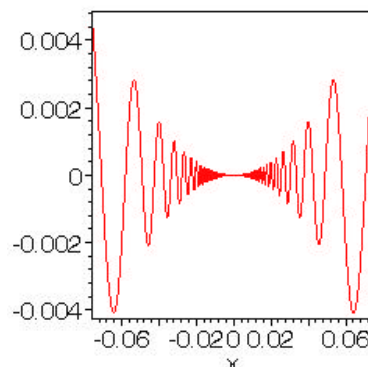
Men f' saknar gränsvärde då x går mot 0, ty $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0$, men $\sin \frac{1}{x}$ saknar gränsvärde då x går mot 0, eftersom $\sin \frac{1}{x}$ antar i varje intervall $(-\delta, \delta)$ alla värden mellan -1 och 1, $f'(x)$ kan alltså inte gå mot ett gränsvärde då x går mot 0.

- b) För $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} > 0$, ty då är $0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$, f är alltså strängt växande och därmed injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$ (slutet intervall, ty f är kontinuerlig) och $Df^{-1}(\frac{9}{2\pi^2}) = \frac{1}{Df(a)}$

där $f(a) = a^2 \cos \frac{1}{a} = \frac{9}{2\pi^2}$; försök med $a = \frac{3}{\pi}$: bingo ($\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$), svaret blir alltså

$$Df^{-1}(\frac{9}{2\pi^2}) = \frac{1}{Df(\frac{3}{\pi})} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 3}{\pi} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{6 + \sqrt{3}\pi}.$$

- c) $f''(x) = 2 \cos \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} > 0$ ty $f''(\frac{2}{\pi}) = \pi$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2$ och för $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'''(x) = -\frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} < 0$, dvs f'' är str. avt. $\Rightarrow f''(x) > 2 \Rightarrow f$ strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$.



REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 2000

Moment 3: integral

1. Vad är en primitiv funktion till f ? Kan du motivera varför en kontinuerlig funktion har en primitiv funktion (hur konstruerar man primitiva funktioner)?
2. Vad är $\int f(x)dx$ resp. $\int_a^b f(x)dx$? Kan du visa att $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$, oberoende av vilken primitiv funktion F till f man väljer.
3. Hur lyder formlerna för variabelsubstitution och för partiell integration?
4. Vad är en Riemann-summa?
5. Kan du partialbråksuppdelar rationella funktioner?
6. Är summan/produkten av två jämna funktioner jämn? Av udda funktioner? Av en udda och en jämn funktion?

EXTRAUPPGIFTER

1), 2), 3) se sista sidan av "datorlaboration"

OBS: rättelse svar till 1): $f(x) = 2 \operatorname{sgn}(x-1) \left(x^{\frac{x}{x-1}} + \frac{1}{x} - x - x^{\frac{1}{x-1}} \right), 0 < x \neq 1$.

4) Beräkna den effektiva strömstyrkan i_1^2 definierad av $i_1^2 \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i(t)^2 dt$ för en växelström $i(t) = i_0 \cos \omega t$ med vinkelfrekvens ω .

5) Beräkna $\int_{-8}^8 \frac{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{|x|}}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx$.

6) Bestäm primitiva funktioner till $\frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$ resp. $\frac{1}{\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.

7) Låt $f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$. Visa att $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}$, beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0) = \ln 2$.

8) Beräkna $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\sin 2x)^{-2}} dx$.

svar: 4) $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$ 5) $12 - 3\ln 5$ 6) $4\sqrt{1+\sqrt{x}}$ resp. $2\ln\left(\sqrt{x+\frac{1}{2}} + \sqrt{1+\sqrt{x}}\right)$

7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1, F(x) = \ln(1 + \cosh x)$ 8) $\frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{12}$