

BOOLESK ALGEBRA (föreläsningsanteckningar)

DEF. $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ kallas BOOLESK ALGEBRA om

- M är en icke tom mängd
- $'$ är en unitär operator på M , $+$ och $\cdot$ är binära operatorer på M
- 0 och 1 är två element i M

så att följande axiom gäller: för $x, y, z \in M$ gäller

$$A1: \begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases} \quad (\text{kommutativitet})$$

$$A2: \begin{cases} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \end{cases} \quad (\text{distributivitet})$$

$$A3: \begin{cases} x + 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases} \quad (0 \text{ resp. } 1 \text{ är neutralt element för } + \text{ resp. } \cdot)$$

$$A4: \begin{cases} x + x' = 1 \\ x \cdot x' = 0 \end{cases} \quad (\text{komplementregeln})$$

Ta gärna med följande regel

$$A0: \begin{cases} x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ x + (y + z) = (x + y) + z \end{cases} \quad (\text{associativitet, kan härledas ur } A1 \dots A4)$$

Observera "dualitetsprincipen: byter man i en giltig sats överallt

$$\begin{cases} + \text{ mot } \cdot \\ \cdot \text{ mot } + \\ 0 \text{ mot } 1 \\ 1 \text{ mot } 0 \end{cases} \quad \text{så fås igen en giltig sats (klart, axiomen är ju "duala").}$$

EXEMPEL

a) $\langle M, \vee, \wedge, \neg, f, s \rangle$ där M är mängden av alla matematiska utsagor, ekvivalenta utsagor identifierade, med t.ex. $f : 1 = 2$ och $s : 2 = 1 + 1$.

b) $\langle P(M), \cup, \cap, ^c, \emptyset, M \rangle$ där M är en mängd ($P(M)$ är potensmängden).

En viktig binär operator är XOR-operatoren (eller *ring summan*, eng: *Exclusive OR*):

DEF. I en Boolesk algebra $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ definieras för $x, y \in M$:

$$x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y.$$

För utsagor (ex. a) är $P \oplus Q$ "antingen P eller Q men ej bägge",

för mängder (ex. b) är $A \oplus B = A \Delta B$ den "symmetriska mängddifferensen".

REGLER (visas på föreläsningen)

I en Boolesk algebra $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ gäller för $x, y, z \in M$:

- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{cases}$ (idempotenslagarna) | 2) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x \cdot 0 = 0 \end{cases}$ (dominanslagarna) |
| 3) $\begin{cases} x + x \cdot y = x \\ x \cdot (x + y) = x \end{cases}$ (absorptionslagarna) | 4) $(x + z = 1 \text{ och } x \cdot z = 0) \Rightarrow z = x'$ |
| 5) $(x')' = x, \begin{cases} 0' = 1 \\ 1' = 0 \end{cases}$ (är idempotent) | 6) $\begin{cases} (x + y)' = x'y' \\ (x \cdot y)' = x' + y' \end{cases}$ (de Morgan). |

ANMÄRKNINGAR

Att $'$ är en unitär operator på M innebär att $'$ är en avbildning från M till M som ordnar till ett element $x \in M$ ett entydigt bestämt element $x' \in M$ $\left(\begin{matrix} ': M \rightarrow M \\ x \mapsto x' \end{matrix} \right)$.

Att $+$, resp. $\cdot$, resp. $\oplus$ är en binär operator på M innebär att $+$, resp. $\cdot$, resp. $\oplus$ är en avbildning från $M \times M$ till M som ordnar till ett element $(x, y) \in M \times M$ (alltså till två element x, y ur M) ett entydigt bestämt element $x + y \in M$ resp.

$x \cdot y \in M$ resp. $x \oplus y \in M$ $\left(\begin{matrix} +: M \times M \rightarrow M, \cdot: M \times M \rightarrow M, \oplus: M \times M \rightarrow M \\ (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y) \mapsto x \cdot y \quad (x, y) \mapsto x \oplus y \end{matrix} \right)$.

För två mängder A och B är (den cartesiska) produkten $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, dvs. mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$.

VARNING: Ingen av följande 4 implikationer gäller:

$$\begin{cases} x + y = x + z \Rightarrow y = z \\ x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z \end{cases} \text{ resp. } \begin{cases} x + y = x \Rightarrow y = 0 \\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Enkla motexempel fås i en mängdalgebra (jmf. uppg. 11 i MA):

För $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}, D = \{1\}$, $(A, B, C, D \in P(\mathbb{N}))$ gäller

$A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3\}$ men $B \neq C$, $A \cap B = A \cap D = \{1\}$ men $B \neq D$,

$A \cup D = A$ men $D \neq \emptyset$ och $D \cap A = D$ men $A \neq \mathbb{N}$.

OBS: det räcker att vederlägga två implikationer, vilka och varför?

Däremot gäller för $\oplus$ **strykningslagen**: $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$.