

EXTRAUPPGIFT 3 (tillämpning av derivata, trigon. fkt.)

- 1) Låt $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig på $[0, \infty)$. Visa att f är injektiv på $[1, \infty)$. Är f injektiv i intervallet $(0, 1)$?
- 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$.
 - a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?
 - b) Visa att f är injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$ och beräkna $D(f^{-1})(\frac{9}{2\pi^2})$.
 - c) Visa att f är strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$.
- 3) Visa att $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$ för $0 < a < b < \pi$.
- 4) Visa att för positiva x gäller: $2^x < x^2 \Leftrightarrow 2 < x < 4$ (det ger t.ex. $2^e < e^2$).
- 5) Visa att $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$, $D_f = (0, \frac{\pi}{2})$, är injektiv, bestäm värdemängden V_f , och $D(f^{-1})(\frac{3}{2\pi})$. **svar:** $(0, \frac{2}{\pi}), \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi - \sqrt{3})}$
- 6) Låt $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.
 Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?
 Rita kurvan $y = f(x)$ med angivandet av asymptoter och konvexitet/konkavitet.
 [Uppg. 1) och 2) får du lösningar till]

Lösningsförslag till extrauppgift 1.1a)

Det var ett "om och endast om" påstående (en ekvivalens av två utsagor), det bästa är att visa dem två implikationerna var för sig. Jag skriver xy i.st.f. $x \cdot y$:

" $\Rightarrow$ ": Om $x + y = x \oplus y$ gäller, så är $xy = 0$:

$$\begin{aligned} \text{bev: } x + y = x \oplus y &\Rightarrow x(x + y) = x(x' y + xy') \Rightarrow x + xy = xy' \Rightarrow x = xy' \Rightarrow xy = 0 \\ &\quad (\text{vi utnyttjade } xx = x, xx' = 0, x + xy = x) \qquad \text{vsv} \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ": Om $xy = 0$ gäller, så är $x + y = x \oplus y$:

$$\begin{aligned} \text{bev: } xy = 0 &\Rightarrow x + y = x(y + y') + y(x + x') = xy + xy' + yx + yx' = xy' + yx' \\ &\quad (\text{vi utnyttjade } x + x' = 1, x1 = x) \qquad \text{vsv} \end{aligned}$$

Ett annat (naja, mycket liknande) bevis får du med identiteten (visat på föreläsningen!)

$$x \oplus y = (x + y)(xy)'$$

$$\begin{aligned} \text{"}\Rightarrow\text{"}: x + y = x \oplus y &\Rightarrow \underbrace{(x + y)(xy)}_{=xy+yx=xy} = \underbrace{(x \oplus y)(xy)}_{=(x+y)(xy)'(xy)=0} \Rightarrow xy = 0 \quad \text{vsv} \end{aligned}$$

$$\text{"}\Leftarrow\text{"}: xy = 0 \Rightarrow x \oplus y = (x + y)(xy)' = (x + y)0' = x + y \quad \text{vsv}$$

Anm: på föreläsningen har vi visat identiteten $x + y = x \oplus y + xy$ (som är ganska självklar för utsagor och för mängder, se uppg. 12g i MA); det ger direkt " $\Leftarrow$ "!

Bevis av "strykningslagen" $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$:

" $\Leftarrow$ ": trivialt

" $\Rightarrow$ ": $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow xy' + x'y = xz' + x'z$, multiplikation med x resp. x' ger
 (*) $xy' = xz'$ och $x'y = x'z$.

Därmed kan vi nu visa att $z + y' = 1$ och $zy' = 0$, regel 4 ger då att $y' = z'$:

$$z + y' = [\text{multiplicera med } 1 = x + x'] = zx + zx' + y'x + y'x' = [*] = \\ = zx + x'y + xz' + y'x' = x + x' = 1.$$

$$zy' = [\text{multiplicera med } x + x'] = zxy' + zx'y' = [*] = zxz' + x'yy' = 0. \quad \text{vsv}$$

Lösningsförslag till extrauppgift 2.1)

$D_f = \{x : x \neq 0 \wedge x \leq 1 \wedge 2x \leq 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$. Eftersom f är sammansatt av kontinuerliga funktioner så är f kontinuerlig (på hela D_f !), vidare är f deriverbar i $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, ty f är sammansatt av funktioner som är deriverbara i alla inre punkter i D_f . För att lättare kunna beräkna gränsvärdena och derivatan skriver vi om f (ändamålsenligt):

$$f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right) = \frac{\sqrt{1-x} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}}, & \text{då } x > 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{-\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}\right)}, & \text{då } x < 0 \end{cases}.$$

[obs: $\sqrt{x^2} = -x$ då $x < 0$!] Detta ger att $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$, f saknar alltså

gränsvärde då x går mot 0. Vidare är för $x < 0$ $f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{-\frac{1}{x} + 2}{-\frac{1}{x} + 1}}}$, det ger att

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$, linjen $y = 1 - \sqrt{2}$ är alltså asymptot då $x \rightarrow -\infty$. För $x > 0$ är

$$f'(x) = \frac{\frac{-(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \right)}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-2x}(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2} > 0,$$

och för $x < 0$ är då $f'(x) < 0$ (minustecken!). Detta visar att $f(\frac{1}{2}) = 1$ är f 's största värde och s.o.m.v. ger att f antar alla värden mellan $1 - \sqrt{2}$ och $-\frac{1}{2}$ och mellan $\frac{1}{2}$ och 1.

Därmed har vi bestämt $V_f = (-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$

[obs: $1 - \sqrt{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$].

