

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2001-08-20, kl 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** , tel. 0740 - 459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
- Betrakta mängderna $A = \{2, -3, 4, 2, -2, 3, -3, 4, 5\}$ och $B = \{1, 3, 2\}$.
 - Bestäm $A \cup B$, $A \cap B$ och $A \setminus B$. (3p)
 - Hur många olika bijektiva avbildningar $f: A \rightarrow A$ finns? (2p)
 - Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$, $x \oplus y = x' \cdot y + x \cdot y'$. Visa att $(x \oplus y) + (y \oplus z) = x \cdot y' + y \cdot z' + z \cdot x'$. (4p)
 - Visa med induktion att $2 + \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)
 - Beräkna det exakta värdet av $\arctan 5 - \arctan \frac{2}{3}$. (3p)
 - Låt $g(x) = x^2 - x - \ln x$.
 - Visa att $g(x) > 0$ för $1 \neq x \in D_g$. (4p)
 - Visa att funktionen f som ges av $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ är kontinuerlig på $[0, \infty)$ och injektiv på $[1, \infty)$ och bestäm V_f .
Är f injektiv i $(0, \infty)$? (6p)
 - Bestäm arean av $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (3p)
 - Givet är $f(0) = 0$ och $f'(x) = \frac{1 + \sinh x}{\cosh x}$.
 - Beräkna $f(x)$. (4p)
 - Rita kurvan $y = f(x)$ med angivandet av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (5p)
 - Låt $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$. Visa att f är kontinuerligt deriverbar på hela $\mathbb{R}$. (4p)
 - Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (5p)
 - Visa att om $f'(x) \leq 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f avtagande i (a, b) . (3p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2001-01-10, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Johan Hoffmann, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$, $x \oplus y = x' \cdot y + x \cdot y'$.
 - a) Visa att $x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$. (4p)
 - b) Gäller $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$?
 [Tips b): betrakta $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbb{N} \rangle$ och $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2, 3\}$] (2p)

 2. Hur många olika fyrasiffriga tal kan bildas med siffrorna 1, 3, 5, 7? (3p)

 3. Visa med induktion att $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln\left(\frac{n^4 - n^2}{12}\right)$ för alla $3 \leq n \in \mathbb{N}$. (5p)

 4. Låt $f(x) = e^{1-x^2}$.
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (6p)
 - b) Visa att $f(x) > 3 - 2x$ för $1 \neq x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. (4p)

 5. Beräkna arean av området $D = \{(x, y) : |x| \leq \frac{\pi^2}{4}, \frac{-1}{\cosh x} \leq y \leq \cos \sqrt{|x|}\}$. (5p)

 6. Visa att $0 < \cosh x - \cos x < x \sinh x$ för alla $0 \neq x \in \mathbb{R}$ och beräkna med hjälp härav $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x}$. (6p)

 7. Låt $f(x) = \sinh(|x|)^{\sin|x|}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.
 - a) Visa att f är kontinuerlig i 0. (3p)
 - b) Har $f'(x)$ ett gränsvärde då x går mot 0? (1p för rätt $f'(x)$). (2p)

 8.
 - a) Formulera och bevisa Rolles sats. (4p)
 - b) Vad är en injektiv funktion? (2p)
 - c) Definiera funktionen $\arctan x$ och visa att $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2000-10-20, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Martin Adiels, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:
 $x' \cdot y' = x \cdot y + x' \cdot y' \Leftrightarrow x' + y' = 1.$ (4p)
 2. I ett system med 12 komponenter är 4 komponenter sönder.
 På hur många olika sätt kan detta inträffa? (3p)
 3. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n k(3k-1) = n^2(n+1)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)
 4. Beräkna $2 \arctan 2 + \arcsin \frac{4}{5}$. (4p)
 5. Beräkna arean av området $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\cos x}{3+3\sin x - \cos^2 x} \right\}.$ (5p)
 6. Låt $f(x) = x^2 + 4x - (4x+2)\ln x$.
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter, konvexitet/konkavitet. (6p)
 - b) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = 0$. (5p)
 - c) Funktionen h ges av $D_h = [1, \infty)$ och $h(x) = f(x)$ för $x \in D_h$.
 Visa att h är injektiv och beräkna $Dh^{-1}(e^2 - 2)$. (2p)
 7. a) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$. (1p)
 - b) Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{x}$ för $x \neq 0$.
 Är f kontinuerlig i 0? (2p) Är f deriverbar i 0? (3p) (5p)
 8. a) Visa att om funktionerna f och g är deriverbara i a så är även $f + g$ deriverbar i a och $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. (3p)
 - b) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (4p)
 - c) Definiera funktionen $\ln x$ och visa att $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ($a, b \in (0, \infty)$). (4p)

BB

Tentamen i matematik E1, del A, 94-09-02, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Hans Sandquist, ankn 5321.

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivnings omslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad !

=====

1. Låt $a_0 = 2, a_1 = 5$ och $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ för $n \in \mathbb{N}$.
Visa med induktion att $a_n = 2^n + 3^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (6p)

2. Visa att $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.
[Med denna formel beräknade *J.Machin* (~ 1705) π med 100 decimaler !]. (6p)

3. Bestäm en primitiv funktion till
a) $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + 1}}$ (4p) b) $\frac{\sin(x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(x)}{\sin^4(x) + \cos^4(x)}$ (3p) (7p)

4. Visa att funktionen $f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln(x)$
är injektiv och bestäm värdemängden V_f . (6p)

5. Låt $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$.
a) Rita kurvan $y = f(x)$ (ange extrempunkter; visa att kurvan är strängt konkav). (6p)

- b) Låt D vara det område i xy -planet, som begränsas av kurvan $y = f(x)$ och x -axeln och $m(D) = \text{arean av } D$.
Visa $m(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)e^{\sin(t)} dt$ och $\frac{e^2 - 1}{2e} < m(D) < \frac{e^2 - 1}{e}$. (5p)

6. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x \ln(1 + x)}$. (4p)

7. Visa att $\int_a^b f(x) dx$ är konvergent om $\int_a^b |f(x)| dx$ är konvergent. (4p)

8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (6p)

BB

Tentamen i matematik E1, del A, 94-10-31, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivnings omslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad !

=====

1. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^N (3k^2 - 3k + 1) = N^3$ för alla naturliga tal N . (5p)

2. Konstruera kurvan $y = \frac{1}{x} + 2 \arctan(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter, konvexitet och konkavitet. (6p)

3. Bestäm en primitiv funktion till $\frac{\sin^3(x) + \sin(x)}{\cos^3(x) + \cos(x)}$. (5p)

4. Låt $f(x) = \frac{\cosh(x) - x \sinh(x)}{(\cosh(x))^2}$.

a) Visa att f har ett nollställe i $(1, \frac{3}{2})$. (2p)

b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (2p)

c) Beräkna $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) dx$. [Ledn: integrera partiellt $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx$] (5p)

5. Låt $f(x) = x \ln(e^{\sin(x)} \sin(|x|))$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.

a) Visa att f är kontinuerlig i 0. (3p)

b) Är f deriverbar i 0? (2p)

c) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. (4p)

6. Hur många lösningar har ekvationen $\ln((a \cos(x))^2) + 4 \cos(x) + 3x^2 = 0$ i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ($a \in \mathbb{R}$)? (6p)

7. Definiera funktionen $\arctan(x)$ och härled ett uttryck för dess derivata. (4p)

8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (6p)

BB

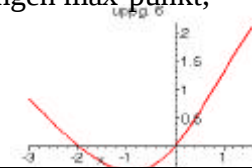
Svar till tentorna i matematiska metoder del A för E1 (ht 2001)

01-08-20

1a) $\{2,3\}, \{-3,-2,1,2,3,4,5\}, \{-3,-2,4,5\}$ b) 720 4) $\frac{\pi}{4}$ 5b) $V_f = [0, \infty)$, ej injektiv c) $\frac{1}{6}$

6a) $2 \arctan e^x + \ln \cosh x - \frac{\pi}{2}$ b) $(\ln(\sqrt{2}-1), \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4})$ är min-punkt, ingen max-punkt,

f är konvex i $(-\infty, \ln(1+\sqrt{2}))$, konkav i $(\ln(1+\sqrt{2}), \infty)$



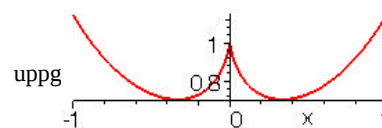
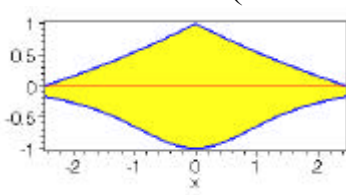
01-01-10

1b) nej 2) 24 4a) $(0, e)$ är max-punkt, $y = 0$ är asymptot

f är konvex i $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och konkav i $\mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

5) $4 \left(\arctan e^{\frac{\pi^2}{4}} - 1 \right) + 2\pi$

6) 0 7b) nej



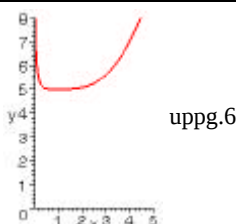
00-10-20

2) 495 4) π 5) $\ln \frac{4}{3}$

6a) f är str. konvex, $(1, 5)$ är min-punkt, $x = 0$ är asymptot

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 2x - (2x^2 + 2x)\ln x$ c) $\frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)}$

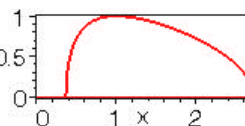
7b) f är deriverbar



94-09-02

3) $\frac{2}{3}(\sqrt{x^3+1} + \ln(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3}))$ b) $\frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x)$ 5) grafen:

min: $(\frac{1}{e}, 0), (e, 0)$ max: $(1, 1)$ 4) $V_f = (-1, \infty)$ 6) 0.25



94-10-31

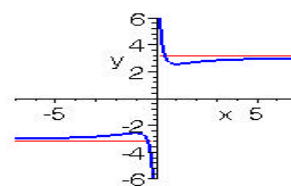
2) max/min: $\pm(1, 1 + \frac{\pi}{2})$, asymptoter $x = 0, y = \pm\pi$

f är konvex i $(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}] \cup (0, \sqrt{1+\sqrt{2}}]$,

konkav i $[-1, 0) \cup [\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty)$

3) $\ln(\cos^2 x) - \frac{3}{2}\ln(\cos^2 x + 1)$ 4b) 0 c) 0 5b) nej c) 2

6) $|a| < e^{-2}$: 0 lösn., $|a| = e^{-2}$: 1 lösn., $|a| > e^{-2}$: 2 lösn.



Lycka till!

Bernhard