Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del A (TMA042), ht 2001

- Till varje matematikkurs ges datorlaborationer i *Maple* och *MATLAB* (i del A bara *Maple*). Syftet är att du skall bekanta dig med och börja använda dessa program för att öka förståelsen för det du just håller på med i matten, men även för att kunna utnyttja dem senare (inte bara i matte kurser).
- Uppgift 1 och 3 kan ge 1 bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder för E1 del A, 26/10, 15/1 och 19/8, uppgift 2 är obligatorisk för kursen "datoranvändning" och skall göras på schemalagd tid med handledare som bedömer den direkt.
- Dela upp laborationen: uppg. 1a)-c) kan du sätta i gång med omedelbart, uppg. 1d),e) och uppg. 3 bör du göra lv 6/7.
- Uppg. 1 och 3 skall lämnas till mig senast fr, 12/10, kl. 9^{45} (efter föreläsningen). Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer <u>längst upp</u> <u>på varje inlämnat</u> blad, <u>blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej</u>. Laborationen lämnas tillbaka med del A-tentan.

Uppgift 1 (olikheter, Boolesk algebra, kombinatorik)

a) För vilka reella x gäller $|x^2-1|<|2x-3|$?

b) Bestäm definitionsmängden till $\sqrt{x+5+\frac{9}{x-5}}$.

c) Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra, $x,y,z\in M$.
Visa $x+x\cdot y\cdot z+x'\cdot y'=x+y'$ och $(x+y')\cdot(x+z')=x+y'\cdot z'$
genom att använda *bsimp* på vänsterledet. Bestäm för det första uttrycket även den konjunktiva och den disjunktiva normalformen för vänsterledet.

d) Beräkna $\binom{35}{7}$, $\binom{210}{30}$ och $\dfrac{210\,!}{(30!)^7}$.

e) Bestäm och faktoruppdela den konstanta termen i utvecklingen av $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}\,x}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\,x}}\right)^{25}$.

Uppgift 2 (funktioner, gränsvärde, derivata)

a) "Lita aldrig på figurer":

Låt $f(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x}\ln x+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x>0$ och $f(0)=0$.

a1) Rita kurvan $y=f(x)$ för $0<x<40$, för $0<x<16$ och för $0<x<1$.
Då tror du väl att f är injektiv? Nix! Rita kurvan även för $0<x<0.0001$!

a2) Beräkna $f(1)$, $f'(x)$, $f'(1)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$.

b) "Lita inte alltid på maple":

Låt $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.

b1) Rita kurvan för $-9 < x < 9$ (snyggt, va ?).

b3) Visa <u>med datorn</u> att f är jämn, kontinuerlig i 0 och har x-axeln som asymptot.

b4) Avgör med datorn om f är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

b5) Rita kurvan $y = f'(x), -9 < x < 9$ och motivera att f antar sitt största värde i 0.

c) "Låt maple hjälpa dig ":

Låt $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$ och $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$.

c1) Bestäm D_f och D_g.

c2) Rita kurvorna $y = \pm f(x), x \in D_f$ och $y = \pm g(x), x \in D_g$ i samma diagram.

<u>Upgift 3 (integral)</u>

a) Beräkna $\displaystyle\int \frac{ax+b}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$, $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2}\right)dx$ och $\displaystyle\int_1^t \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2}\right)dx$.

b) Låt $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x + 4}$.

b1) Partialbråksuppdela $f(x)$.

b2) Beräkna mha *maple* en primitiv funktion F till f och rita grafen $y = F(x)$ för $-6 < x < 8$. Vilken primitiv funktion fick du?

c) Beräkna arean av det område som omslutes av kurvorna i uppgift 2c).

d) Låt $f(x) = 3x(x-2)\left(1 - e^{-x}x^2\cos\left(3\sqrt{x}\right)\sin(x)\right)\ln\left(2 - \frac{x}{\pi}\right)$.

d1) Rita grafen till f för $0 \leq x \leq \pi$ och tre Riemannsummor $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ till f i ett diagramm: Välj n lika långa delintervall, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, och $\xi_k = x_{k-1}$ = vänstra randpunkten, resp. $\xi_k = x_k$ = högra randpunkten, resp. $\xi_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + x_k\right)$ = mittpunkten) $(k = 1 \cdots n,$ lämpligt $n > 50)$.

d2) Beräkna Riemannsummorna i d1) för $n = 37$, för $n = 237$ och ”mittsumman” även för $n = 2222$; jämför sedan dessa värden med *maple*:s värde av $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$.

Ger Riemannsummor en bra approximation av bestämda integraler?

Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

A. Allmänt

- Uppgifterna 1) och 3) skall göras med *maple* eller *mathematica*. Lämna in hela ditt "worksheat" (alla kommandon)! Skriv ditt namn och ditt personnummer längst upp på varje blad, på första sidan med *maple*.
- I PC-versionen kan du se var *maple* bryter sidor: *arkiv: Print Preview*!
- OBS: du skall alltid kommentera alla dina lösningar/resultat (gärna för hand)!
- Förbered dig noggrant innan du sätter dig vid datorn. Sedan kan du sätta igång ganska omedelbart: gå igenom bifogade exemplen först, de innehåller allt vad du behöver (och lite till). Är du osäker på något, så läs den utförliga on-line-hjälpen i *maple*, som du får med ?, prova t.ex. ?*plot*, eller ?*D*, eller varför inte ??. Ändå fiffigare: tryck helt enkelt ctrl och F1, så kommer on-line-hjälpen om det ord cursorn står på eller precis efter (eller klicka på ”Help”).
- Några allmänna tips för *maple*: Ett bra sätt att skriva in funktioner är att ange den "elementvisa tillordningen" $f : x \mapsto f(x)$, då är det sedan enkelt att beräkna *f(a)*, *f'* och *f'(a)*. Öva in det med sinusfunktionen: skriv in det, kolla *maples* output (se även ex2, f.f.a. tillägg 3):

```
>f:=x->sin(2*x);
>f(Pi/3);
>D(f);
>D(f)(Pi/3);
```

- Figurerna kan du förse med en titel (*title* = `*din text*`, obs: fnuttar !), rita noggrannare (*numpoints* = *n*, $n \in I\!N$, default är $n = 50$, se tillägg 4), tjockare (*thickness* = *m*, $m \in \{0,1,2,3\}$) och med annan färg (*color* = ...), läs ?*plot*[*options*] ! Rita gärna med *animatecurve* (finns i plotpaketet >*with*(*plots*)). Markerar du då grafen så får du upp en verktygsrad där du kan ”spela upp” grafen, välja hastighet, riktning m.m.…!

B. Till uppgifterna

1) **a),b)** Olikheter (och ekvationer) löser du med >*solve*, se ex2. Absolutbeloppet skrives *abs*.

c) Ladda in logik-paketet (>*with*(*logic*)). Operatorerna $+, \cdot, '$ skriver du &*and*, &*or*, &*icke*, med >*bsimp*(*expr*) förenklar du sedan uttrycket *expr*, du kan också få ditt uttryck på "kanonisk form" (disjunktiv, resp. konjunktiv normal form med *DNF*, resp. *CNF*), se ex1.

d) Binomialkoefficienterna beräknas med *binomial* som finns i kombinatorik paketet (laddas in med >*with*(*combinat*)). Se ex1. Det jättestora talet $\frac{210!}{(30!)^7}$ är lösningen till följande tenta-problem: på hur många olika sätt kan man dela in 210 E-teknologer i 7 övningsgrupper a,b,c,d,e,f,g om 30 elever? Tolka också de andra två talen.

e) Räknar ut sådana uttryck gör du med *expand*, pröva även *simplify* och *normal*; faktoruppdelning av heltal fås med *ifactor*. Se ex1.

2) **a)** Ta minst 900 ”numpoints”!

b) Att f är jämn kan du ju "räkna ut" (*f*(*x*) - *f*(-*x*) = ...), men t.o.m. det finns i *maple*: >*type*(*f*(*x*),*evenfunc*(*x*)). Beräkna höger- och vänstergränsvärdet för att vara säker att gränsvärdet existerar; att de är lika, kan du snyggt kolla med "Boolesk evaluering": >*evalb*(*limit*(*f*(*x*),*x=0*,*left*)= *limit*(*f*(*x*),*x=0*,*right*)); $\lim_{x\to\infty} f(x)$ får du med >*limit*(*f*(*x*), *x=infinity*). Men obs, *maple* svarar fel! Skriv om f (t.ex. $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^2}}$ för *x*>0).

b4): du måste kolla om $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ existerar (kolla höger och vänster-gränsvärdet)!!

b5): du kan beräkna f:s största och minsta värde med >*maximize*(f(x),x) resp. >*minimize*(f(x),x); vill du beräkna det största värde som f antar på $[a,b]$, så skriver du >*maximize*(f(x),x,a..b), *infinity* tillåtet men inte π. Men här skall du <u>motivera</u> det m.h.a. $f'>0$, resp. <0! Se ex2, ff.a. tillägg 2 och tillägg 3 där!

c) Försök! *Maple* hjälper dig (D_f = ? Lös olikheterna "uttrycket under roten ≥ 0"). Rita de 4 kurvorna gärna först var för sig (med *animateplot*!), sedan tillsammans m.h.a. *display*. Rita 1:1, det kan du klicka fram i efterhand, men bäst är att du skriver in det: >*scaling=constrained*. Det är en välkänd sluten kurva ("kardiod").

3) Integrerar gör du med >*int*(f(x),x) för obestämd integral, resp. med >*int*(f(x),x=a..b) för bestämd integral; vill du först "se" din integral, så skriv *Int* i st.f. *int* och sedan *value*(%). *Maple* räknar fram allmänna (komplexa) lösningar, för att få reellvärda funktioner (och för att kunna rita) måste du skriva om dem, t.ex. $\ln|x|$ i st.f. $\ln x$; inversa sinh-, tanh- och cosh -funktionerna kan du skriva m.h.a. ln genom att "convertera" dem: se ex3. *Maple* ger en primitiv funktion med konstanten $c = 0$, vilken primitiv funktion får du då? (beräkna t.ex. $F(0)$….)
Partialbråksuppdelningen får du med >*convert*(f(x),*parfrac*,x).
Jämför ditt svar till d) med det exakta värdet $\frac{3\pi}{2}$.
Ladda in student-paketet, då kan du rita funktioner och de tre efterlysta Riemannsummorna (med >*leftbox*(f(x),x=a..b,n); osv., färgen kan du välja med *shading*=…), beräkna Riemannsummorna (med *leftsum*(f(x),x=a..b,n); och sedan >*evalf*...), svara! Se ex3.

<u>Anmärkning:</u> I exempel 2 löser vi följande tenta-uppgift med datorn:

Låt $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ för $0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ och $f(0) = a$. Bestäm a så att f är kontinuerlig i 0.

Det klarar vi även utan datorn: bara "standardgränsvärden" får (och skall) användas för att beräkna $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Flera "omskrivningar" är möjliga, t.ex.

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{x^2} = \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})(-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot x^2};$$ så, nu är det klart, ty

$$\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1 \text{ då } h \to 0 \;\; (h = -2\sin^2\tfrac{x}{2} \to 0 \;\; då \;\; x \to 0) \;\; \text{och} \;\; \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} \to -\frac{1}{2} \text{ då } x \to 0$$

ty $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$ då $t \to 0$ ··· .

LYCKA TILL !

Bernhard