Lösningar till tentamen 8/9-2001, E1

Greger Cronquist

1. (a) Bestäm samtliga rötter till ekvationen $(x^2+5x+6)(x^2+3x+5)=0$.

Lösning Vi kan skriva om ekvationen som $p(x)q(x)=0$ med $p(x)=x^2+5x+6$ och $q(x)=x^2+3x+5$, så vi får samtliga rötter genom att lösa $p(x)=0$ resp. $q(x)=0$ var för sig:

$$\begin{aligned}
&p(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+5x+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+5/2)^2-25/4+6=0\\
&\Leftrightarrow\quad (x+5/2)^2=1/4 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm 1/2-5/2\\
&q(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+3x+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+3/2)^2-9/4+5=0\\
&\Leftrightarrow\quad (x+3/2)^2=-11/4 \quad\Rightarrow\quad x_{3,4}=\pm i\sqrt{11}/2-3/2
\end{aligned}$$

Så svaret blir alltså att $\boxed{x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_{3,4}=(3\pm i\sqrt{11})/2}$.

(b) Förenkla (så långt som möjligt) uttycket

$$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\Big/\left(\frac{x}{x-y}-1\right)$$

Lösning Sätt på gemensamma bråkstreck och förenkla:

$$\frac{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}}{\frac{x-(x-y)}{x-y}}=\frac{\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{(x-y)(x+y)}}{\frac{y}{x-y}}=\frac{4xy}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{x-y}{y}=\boxed{\frac{4x}{x+y}}.$$

(c) Sök reella lösningar till ekvationen $\ln(2x+1)=1$.

Lösning Exponentierar man båda leden får man

$$e^{\ln(2x+1)}=e^1=e \quad\Leftrightarrow\quad 2x+1=e \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{x=\frac{e-1}{2}},$$

vilket är en lösning eftersom $(e-1)>-1/2$.

(d) Beräkna $\tan(2x)$, om $\tan x=3$.

Lösning Vi kan att formeln för tangens av dubbla vinkeln är

$$\tan(2x)=\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2 x},$$

(där vi dividerade med $\cos^2 x$ i sista ledet) så $\tan(2x)=(2\cdot 3)/(1-3^2)=\boxed{-3/4}$.

2. Sök reella lösningar till ekvationen

(a) $\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x+4)$

Lösning Vi noterar först att om vi hittar en lösning måste $x>-2$ gälla för att den skall kunna vara korrekt eftersom definitionsmängden till $\ln z$ är $z>0$. Med hjälp av logaritmlagarna, kan vi omforma ekvationen till

$$\ln\left(\frac{(x+2)(x+3)}{x+4}\right)=0.$$

Exponentiering ger nu att

$$\frac{(x+2)(x+3)}{x+4}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+5x+6=x+4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x+2=0,$$

så $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-2}=-2\pm\sqrt{2}$. Eftersom x måste vara strikt större än -2, så får vi slänga ena roten, och enbart $\boxed{x=-2+\sqrt{2}}$ är en lösning till ekvationen.

(b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+9}$.

Lösning Kvadrera ett par gånger, och observera att $x\geq-2$ måste gälla för att det första rotuttrycket skall vara giltigt (vilket är det strängaste kravet).

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+9}\\
\Rightarrow\quad &(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})^2=(\sqrt{2x+9})^2\\
\Leftrightarrow\quad &x+2+x+3+2\sqrt{(x+2)(x+3)}=2x+9\\
\Leftrightarrow\quad &2\sqrt{(x+2)(x+3)}=4\\
\Rightarrow\quad &(x+2)(x+3)=4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+5x+2=0,
\end{aligned}$$

så vi får rötterna $x_{1,2}=-5/2\pm\sqrt{25/4-2}=(-5\pm\sqrt{17})/2$. Här måste vi slänga den minsta av rötterna och svaret blir att $\boxed{x=(-5+\sqrt{17})/2}$.

3. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2+4x-1}$ i den punkt på kurvan, där $x=1$.

Lösning När $x_0=1$ har vi att $y_0=\sqrt[3]{2+3+4-1}=\sqrt[3]{8}=2$. Eftersom tangentens ekvation är

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

behöver vi $f'(x_0)$. Först kan vi beräkna derivatan med hjälp av kedjeregeln, där vi noterar att $(\sqrt[3]{z})'=(z^{1/3})'=-1/3z^{-2/3}z'$:

$$f'(x)=\frac{6x^2+6x+4}{3(3x^2-4x+5)^{2/3}}\left(=\frac{6x^2+6x+4}{3y^2}\right),$$

så $f(x_0) = \frac{6+6+4}{3\cdot 2^2} = 4/3$, och vi får tangentens ekvation till

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{4x - 3y = -2}$$

Normalen får vi sen som $-3x - 4y = c$ där $c = -3(1) - 4(2) = -11$, så normalens ekvation är $\boxed{3x + 4y = 11}$.

4. För vilka reella tal x gäller att $\frac{x+2}{2x+1} \le \frac{3x+2}{2x+3}$?

Lösning Flytta över allt till högerledet, sätt på gemensamt bråkstreck och faktorisera:

$$\frac{3x+2}{2x+3} - \frac{x+2}{2x+1} = \frac{(3x+2)(2x+1) - (x+2)(2x+3)}{(2x+3)(2x+1)} =$$
$$= \frac{6x^2 + 7x + 2 - (2x^2 + 7x + 6)}{(2x+3)(2x+1)} = \frac{4x^2 - 4'}{(2x+3)(2x+1)} = \frac{4(x+1)(x-1)}{(2x+3)(2x+1)} = R(x) \ge 0,$$

Vi kan nu göra upp en teckentabell (teckenväxlingar då $x = -3/2, -1, -1/2, 1$)

	$x < -3/2$	$x = -3/2$	$-3/2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < -1/2$	$x = -1/2$
$1/(2x+3)$	$-$	odef	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1/(2x+1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	odef
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$R(x)$	$+$	odef	$-$	0	$+$	odef

	$-1/2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$1/(2x+3)$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$+$	$+$	$+$
$1/(2x+1)$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$R(x)$	$-$	0	$+$

Så vi ser (där $R(x) \ge 0$) att olikheten uppfylls då $\boxed{x < -3/2}$, $\boxed{-1 \le x < -1/2}$ eller $\boxed{x \ge 1}$.

5. Bestäm alla vinklar mellan $0°$ och $360°$, som satisfierar ekvationen $2\sin x + 6\cos x = \sqrt{30}$.

Lösning Vi har, enligt additionsformeln för sinus ($c\sin(x+\alpha) = c\cos\alpha \sin x + c\sin\alpha\cos x$), att

$$\begin{cases} c\sin(x+\alpha) & = 2, \\ c\cos\alpha & = 2, \\ c\sin\alpha & = 6, \end{cases}$$

så vinkeln α måste ligga i den första kvadranten ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). Vi räknar först ut c med Pythagoras sats till $c = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Vi har också att $\tan\alpha = \frac{6}{2} = 3$, så $\alpha \approx 71.6^\circ$. Kvar har vi nu att lösa

$$2\sqrt{10}\sin(x+\alpha) = \sqrt{30} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x+\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow x + \alpha = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ \cdot n_1 \\ 180^\circ - (60^\circ) + 360^\circ \cdot n_2 \end{cases},$$

där vi utnyttjade 30-60-90-triangeln för att lösa ekvationen. Så $x_1 \approx 60^\circ - 71.6^\circ + 360^\circ = \boxed{348.4^\circ}$ och $x_2 \approx 180^\circ - 60^\circ - 71.6^\circ = \boxed{48.4^\circ}$.

6. Bestäm konstanten K, så att cirkeln $x^2 + y^2 = 6x - 8y + 4K$ tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = 2x + 4y$.

Lösning Lös ut x som funktion av y och K i ekvationerna ovan, och hitta sedan K så att vi får en dubbelrot i y. Vi vill alltså först lösa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 6x - 8y + 4K \\ x^2 + y^2 &= 2x + 4y \end{cases}$$

Subtraherar vi den andra cirkeln från den första får vi

$$x^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 6x - 8y + 4K - (2x + 4y) \quad\Leftrightarrow\quad 4x - 12y + 4K = 0,$$

så $x = 3y - K$. Sätter vi in detta i ekvationen för den andra cirkeln får vi nu

$$\begin{aligned} & (3y - K)^2 + y^2 = 2(3y - K) + 4y \\ \Leftrightarrow \quad & K^2 + 9y^2 - 6Ky + y^2 = 6u - 2K + 4y \\ \Leftrightarrow \quad & 10y^2 - (10 + 6K)y + K^2 + 2K = 0 \end{aligned}$$

så

$$y_{1,2} = \frac{3K+5}{10} \pm \sqrt{\frac{(3K+5)^2}{100} - \frac{10K^2 + 20K}{100}}.$$

Vi får en dubbelrot när uttrycket under roten är noll, dvs.

$$\begin{aligned} & \frac{(3K+5)^2}{100} = \frac{10K^2 + 20K}{100} \\ \Leftrightarrow \quad & 9K^2 + 30K + 25 = 10K^2 + 20K \\ \Leftrightarrow \quad & K^2 - 10K - 25 = 0, \end{aligned}$$

varför $K_{1,2} = 5 \pm \sqrt{50} = \boxed{5 \pm 5\sqrt{2}}$.

7. Rita (i sina huvuddrag) kurvan $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ med angivande av (lokala) maxima och minima samt asymptoter.

Lösning Vi börjar med att göra ett par omskrivningar av funktionen vi skall rita:

$$f(x) = y = \frac{x^3}{(x+2)(x-2)} = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}.$$

Vi ser ur detta att när $x \to \pm 2$ så $|y| \to \infty$, vilket betyder att $f(x)$ har lodräta asymptoter när $x = \pm 2$. Vi ser också att $f(x) \sim x$ när $x \to \pm\infty$, så det finns inga vågräta asymptoter, däremot måste $y = x$ vara en sned asymptot (eftersom $f(x)$ beter sig som x när x är tillräckligt stort).

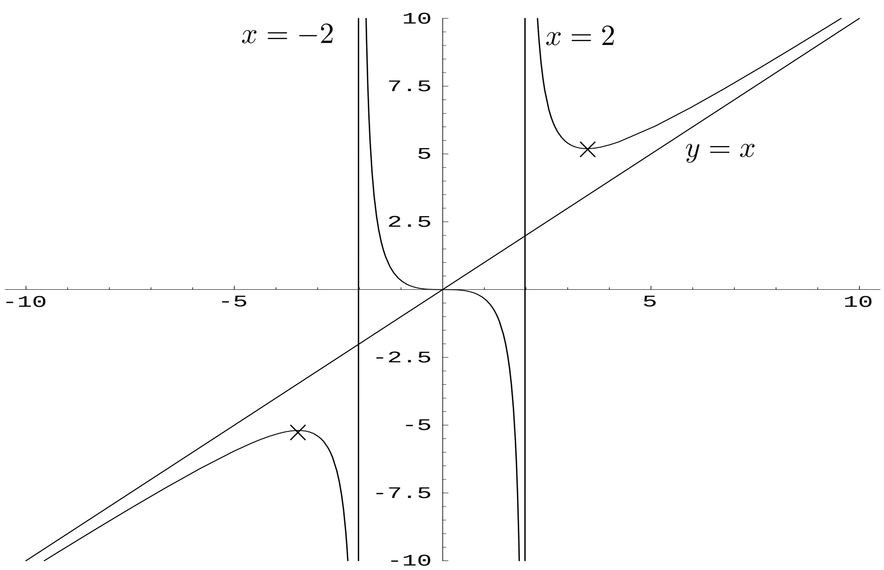
Då var asymptoterna utredda, kvar är maxima och minima. Vi deriverar $f(x)$ och får (enligt deriveringsregeln för division) att

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x(x^3)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2},$$

så vi har stationära punkter när $x = 0$ och $x = \pm 2\sqrt{3}$. En liten tabell är på sin plats.

	$<$	$-2\sqrt{3}$	$<$	-2	$<$	0	$<$	2	$<$	$2\sqrt{3}$	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	odef	$\searrow$	0	$\searrow$	odef	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$

Vi har alltså ett maximum vid $x = -2\sqrt{3}$, en sadelpunkt vid $x = 2\sqrt{3}$ och ett minimum vid $x = -2\sqrt{3}$. Se figur 1 för en graf.



Figur 1: Kurvan $y = x^3/(x^2-4)$ i uppgift 7.

8. Undersök om polynomet $x^{1000} + x^{500} + 1$ är delbart med polynomet $x^2 + x + 1$.

Lösning Vi vill försöka använda faktorsatsen, som säger att $p(x) = x^{1000} + x^{500} + 1$ är delbart med $x - x_1$ om $p(x_1) = 0$. Så om $q(x) = x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ vill vi att $p(x_1) = p(x_2) = 0$. För att göra detta, utnyttjar vi faktoriseringslagen

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

med $a = x$ och $b = 1$, så att $x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = r(x)$. Dvs. vi får, om $x \neq 1$, att

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 - 1 = 0$$

dvs. $x^3 = 1$. Tag nu nollställena till $q(x)$, x_1 och x_2. Det gäller tydligen att $x_1^3 = x_2^3 = 1$. Vi kan nu försöka undersöka huruvida $p(x_1) = p(x_2) = 0$ genom att helt enkelt räkna:

$$p(x_1) = x_1^{1000} + x_1^{500} + 1 = x_1^{333 \cdot 3 + 1} + x_1^{166 \cdot 3 + 2} + 1 = \underbrace{(x_1^3)^{333}}_{=1} \cdot x_1 + \underbrace{(x_1^3)^{166}}_{=1} \cdot x_1^2 + 1 =$$
$$= x_1 + x_1^2 + 1 = q(x_1) = 0.$$

På exakt samma sätt får vi att $p(x_2) = 0$, så enligt faktorsatsen är $p(x) = x^{1000} + x^{500} + 1$ delbart med $q(x) = x^2 + x + 1$.