

BOOLESK ALGEBRA (föreläsningsanteckningar, uppgifter)

DEF. $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ kallas *BOOLESK ALGEBRA* om

- M är en icke tom mängd
- $'$ är en unitär operator på M , $+$ och $\cdot$ är binära operatorer på M
- 0 och 1 är två element i M

så att följande axiom gäller: för $x, y, z \in M$ gäller

$$A1: \begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases} \quad (\text{kommutativitet})$$

$$A2: \begin{cases} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \end{cases} \quad (\text{distributivitet})$$

$$A3: \begin{cases} x + 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases} \quad (0 \text{ resp. } 1 \text{ är neutralt element för } + \text{ resp. } \cdot)$$

$$A4: \begin{cases} x + x' = 1 \\ x \cdot x' = 0 \end{cases} \quad (\text{komplementregeln})$$

Ta gärna med följande regel

$$A0: \begin{cases} x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ x + (y + z) = (x + y) + z \end{cases} \quad (\text{associativitet, kan härledas ur } A1 \dots A4)$$

Observera "dualitetsprincipen": byter man i en giltig sats överallt

$$\begin{cases} + \text{ mot } \cdot \\ \cdot \text{ mot } + \\ 0 \text{ mot } 1 \\ 1 \text{ mot } 0 \end{cases} \quad \text{så fås igen en giltig sats (klart, axiomen är ju "duala").}$$

EXEMPEL

a) $\langle M, \vee, \wedge, \neg, f, s \rangle$ där M är mängden av alla matematiska utsagor, ekvivalenta utsagor identifierade, med t.ex. $f : 1 = 2$ och $s : 2 = 1 + 1$.

b) $\langle P(M), \cup, \cap, ^c, \emptyset, M \rangle$ där M är en mängd ($P(M)$ är potensmängden).

En viktig binär operator är *XOR*-operatorn (eller *ring summan*, eng: *Exclusive OR*):

DEF. I en Boolesk algebra $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ definieras för $x, y \in M$:

$$x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y.$$

För utsagor (ex. a) är $P \oplus Q$ "antingen P eller Q men ej bägge",

för mängder (ex. b) är $A \oplus B = A \Delta B$ den "symmetriska mängddifferensen".

Regler för $\oplus$: "strykningslagen" (sid. 2) och uppg.1d-k.

REGLER (visas på föreläsningen)

I en Boolesk algebra $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ gäller för $x, y, z \in M$:

- 1) $\begin{cases} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{cases}$ (idempotenslagarna)
- 2) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x \cdot 0 = 0 \end{cases}$ (dominanslagarna)
- 3) $\begin{cases} x + x \cdot y = x \\ x \cdot (x + y) = x \end{cases}$ (absorptionslagarna)
- 4) $(x + z = 1 \text{ och } x \cdot z = 0) \Rightarrow z = x'$
- 5) $(x')' = x, \begin{cases} 0' = 1 \\ 1' = 0 \end{cases}$ (är idempotent)
- 6) $\begin{cases} (x + y)' = x'y' \\ (x \cdot y)' = x' + y' \end{cases}$ (de Morgan).

ANMÄRKNINGAR

Att $'$ är en unitär operator på M innebär att $'$ är en avbildning från M till M som ordnar till ett element $x \in M$ ett entydigt bestämt element $x' \in M$ $\left(\begin{matrix} ': M \rightarrow M \\ x \mapsto x' \end{matrix} \right)$.

Att $+$, resp. $\cdot$, resp. $\oplus$ är en binär operator på M innebär att $+$, resp. $\cdot$, resp. $\oplus$ är en avbildning från $M \times M$ till M som ordnar till ett element $(x, y) \in M \times M$ (alltså till två element x, y ur M) ett entydigt bestämt element $x + y \in M$ resp.

$x \cdot y \in M$ resp. $x \oplus y \in M$ $\left(\begin{matrix} +: M \times M \rightarrow M, \cdot: M \times M \rightarrow M, \oplus: M \times M \rightarrow M \\ (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y) \mapsto x \cdot y \quad (x, y) \mapsto x \oplus y \end{matrix} \right)$.

För två mängder A och B är (den cartesiska) produkten $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$, dvs. mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$.

VARNING: Ingen av följande 4 implikationer gäller:

$$\begin{cases} x + y = x + z \Rightarrow y = z \\ x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x + y = x \Rightarrow y = 0 \\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Enkla motexempel fås i en mängdalgebra (jmf. uppg. 11 i MA):

För $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}, D = \{1\}$, $(A, B, C, D \in P(\mathbb{N}))$ gäller $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3\}$ men $B \neq C$, $A \cap B = A \cap D = \{1\}$ men $B \neq D$, $A \cup D = A$ men $D \neq \emptyset$ och $D \cap A = D$ men $A \neq \mathbb{N}$.

OBS: det räcker att vederlägga två implikationer, vilka och varför?

För $\oplus$ gäller däremot **strykningslagen**: $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$.

Försök att bevisa det; ett bevis finns sid. 4.

ÖVNINGSUPPGIFTER

1) Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$. Visa

a) $x + y = x \Leftrightarrow x \cdot y = y$.

b) $x + x \cdot y \cdot z + x' \cdot y' = x + y'$.

c) $(x + y') \cdot (x + z') = x + y' \cdot z'$.

d) $x + y = x \oplus y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.

e) $x \oplus y = y \oplus x$ (kommutativitet).

f) $x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$ (distributivitet).

g) $x \oplus y = (x + y) \cdot (x \cdot y)'$.

h) $(x \oplus y) + (x \cdot y) = x + y$.

i) $(x \oplus y)' = x' \oplus y = x \oplus y' = x' \cdot y' + x \cdot y$.

j) $(x \oplus y) \cdot (y \oplus z) = x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z$.

k) $(x \oplus y) + (y \oplus z) = x \cdot y' + y \cdot z' + z \cdot x'$.

l) Visa att för alla $N \in \mathbb{N}$ gäller $\left(\prod_{k=1}^N x_k \right)' = \sum_{k=1}^N x_k'$ och $\left(\sum_{k=1}^N x_k \right)' = \prod_{k=1}^N x_k'$

($x_1, x_2, \dots, x_N \in M$; $\prod_{k=1}^N x_k = x_1 \cdot x_2 \cdots x_N$ = produkten av $x_1, x_2, \dots, x_N$).

2) Uttryck $x \oplus y$ m.h.a. enbart $\cdot$ och $'$ (AND-grind och NOT-grind).

(svar: $(x' \cdot y')' \cdot (x \cdot y)'$ eller $\left((x' \cdot y')' \cdot (x \cdot y')' \right)'$)

3) Formulera reglerna i 1) och 2) för utsagor och för mängder

(t.ex. 1l för mängder: $\left(\bigcap_{k=1}^N A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^N A_k^c$).

Bevis av "strykningslagen" $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$:

" $\Leftarrow$ ": trivialt

" $\Rightarrow$ ": $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow x \cdot y' + x' \cdot y = x \cdot z' + x' \cdot z$, multiplikation med x resp. x' ger (*) $x \cdot y' = x \cdot z'$ och $x' \cdot y = x' \cdot z$.

Därmed kan vi nu visa att $z + y' = 1$ och $z \cdot y' = 0$, regel 4 ger då att $y' = z'$ (och därmed $y = z$):

$$\underline{z + y'} = [\text{multiplicera med } 1 = x + x'] = z \cdot x + z \cdot x' + y' \cdot x + y' \cdot x' = (*) = \\ = z \cdot x + x' \cdot y + x \cdot z' + y' \cdot x' = x + x' = 1.$$

$$\underline{z \cdot y'} = [\text{multiplicera med } x + x'] = z \cdot x \cdot y' + z \cdot x' \cdot y' = (*) = z \cdot x \cdot z' + x' \cdot y \cdot y' = 0.$$

(eller multiplicera (*) med z resp. med y' så får du

$$x \cdot y' \cdot z = 0 \text{ och } x' \cdot z \cdot y' = 0, \text{ addition ger } (x + x') \cdot y' \cdot z = 0, \text{ alltså } \underline{y' \cdot z = 0}).$$

vsv

Lösning av uppgift 1d:

Det är ett "om och endast om"-påstående (en ekvivalens av två utsagor), det bästa är att visa de två implikationerna var för sig. Vi skriver här xy i st.f. $x \cdot y$:

" $\Leftarrow$ ": Om $xy = 0$ gäller, så är $x + y = x \oplus y$:

$$\text{bev: } \underline{x + y} = x(y + y') + y(x + x') = xy + xy' + yx + yx' = \underline{xy' + yx'} \text{ (ty } xy = 0). \\ \text{(vi utnyttjade } x + x' = 1, x1 = x, 0 + x = x)$$

vsv

" $\Rightarrow$ ": Om $x + y = x \oplus y$ gäller, så är $xy = 0$:

$$\text{bev: } x + y = x \oplus y \Rightarrow xy(x + y) = xy(x' y + xy') \Rightarrow xy + xy = 0 + 0 \Rightarrow xy = 0. \\ \text{(vi utnyttjade } xx = x, xx' = 0, xy + xy = xy)$$

vsv

Ett annat (njaa, mycket liknande) bevis av " $\Rightarrow$ " får du med identiteten

$$x \oplus y = (x + y)(xy)'$$
 (ö 1g):

$$\underline{xy} = xxy + xyy = (x + y)(xy) = (x \oplus y)(xy) = (x + y)(xy)'(xy) = \underline{0}.$$

vsv