

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2002-08-19, kl. 14.15-8.15

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: , tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller
 $x + (x \oplus y) = y + (x \oplus y) = x + y$. (4p)
2. Visa med induktion att $D^n(e^x \sin x) = \sqrt{2^n} e^x \sin(x + \frac{n\pi}{4})$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (5p)
3. Bestäm det minsta talet $n \in \mathbb{N}$ så att $(\sqrt[3]{3x} - \sqrt{\frac{2}{x}})^n$ innehåller en konstant term och ange denna. (4p)
4. Låt $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, $D_f = (0, \infty)$.
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet och asymptoter; ange även V_f . (6p)
 - b) Ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(1, \sqrt{2}-1)$. (2p)
 - c) Visa att linjen $x = f(a)$ ($a > 0$) delar området
 $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$ i två områden med lika stor area (4p)
5. Funktionen f satisfierar $f'(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)} + \cosh(\sqrt{x}-1)$ och $f(1) = 8$.
 Bestäm f ; ange även D_f . (6p)
6. Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
 - a) Visa att f' är kontinuerlig i origo. (4p)
 - b) Visa att f är injektiv i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (4p)
7.
 - a) Formulera och bevisa en formel för derivatan av f^{-1} (" f invers"). (5p)
 - b) Definiera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. (2p)
 - c) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2002-01-15, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Erik Broman, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

1. Låt $A = [-1, 2]$ resp. $B = (0, 1)$ (slutet, resp. öppet intervall i $\mathbb{R}$).
Ange den kartesiska mängdprodukten $A \times B$. (2p)

2. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:
 $(x \cdot y) \oplus (x \oplus y) = x + y$. (4p)

Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n 3k(k+1) = n(n+1)(n+2)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)

4. Beräkna det exakta värdet av $\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{4}$. (4p)

5. Låt $f(x) = x^2 + \ln(1+x^2) - 2x \arctan x$, $D_f = [0, \infty)$, $g(x) = \frac{2 \sin(\pi x)}{\cos^4(\frac{\pi}{2}x) - 4}$.

a) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}(1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2})$. (6p)

b) Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna
 $y = f(x)$, $y = g(x)$ och $x = 1$ (4p var för $\int f(x)dx$ resp. $\int g(x)dx$). (9p)

6. Rita kurvan $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{4+x^4}}$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)

7. Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Visa att f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ (3p)
och ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(\pi, 0)$ (3p). (6p)

8. d) Visa att om funktionerna f och g är deriverbara i a så är även $f + g$
deriverbar i a och $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. (3p)

e) Visa att en funktion som är deriverbar i en punkt a är även kontinuerlig i a . (3p)

f) Definiera funktionerna $\ln x$ och $\exp(x)$ (motivera väl). (3p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2001-01-10, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Johan Hoffmann, tel. 0740 - 459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$, $x \oplus y = x' \cdot y + x \cdot y'$.
 - a) Visa att $x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$. (4p)
 - b) Gäller $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$?
 [Tips b): betrakta $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbb{N} \rangle$ och $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2, 3\}$] (2p)

 2. Hur många olika fyrasiffriga tal kan bildas med siffrorna 1, 3, 5, 7? (3p)

 3. Visa med induktion att $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln\left(\frac{n^4 - n^2}{12}\right)$ för alla $3 \leq n \in \mathbb{N}$. (5p)

 4. Låt $f(x) = e^{1-x^2}$.
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (6p)
 - b) Visa att $f(x) > 3 - 2x$ för $1 \neq x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. (4p)

 5. Beräkna arean av området $D = \{(x, y) : |x| \leq \frac{\pi^2}{4}, \frac{-1}{\cosh x} \leq y \leq \cos \sqrt{|x|}\}$. (5p)

 6. Visa att $0 < \cosh x - \cos x < x \sinh x$ för alla $0 \neq x \in \mathbb{R}$ och beräkna med hjälp härav $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x}$. (6p)

 7. Låt $f(x) = \sinh(|x|)^{\sin|x|}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.
 - a) Visa att f är kontinuerlig i 0. (3p)
 - b) Har $f'(x)$ ett gränsvärde då x går mot 0? (1p för rätt $f'(x)$). (2p)

 8.
 - a) Formulera och bevisa Rolles sats. (4p)
 - b) Vad är en injektiv funktion? (2p)
 - c) Definiera funktionen $\arctan x$ och visa att $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2000-10-20, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Martin Adiels, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:
 $x' \cdot y' = x \cdot y + x' \cdot y' \Leftrightarrow x' + y' = 1.$ (4p)
 2. I ett system med 12 komponenter är 4 komponenter sönder.
 På hur många olika sätt kan detta inträffa? (3p)
 3. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n k(3k-1) = n^2(n+1)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)
 4. Beräkna $2 \arctan 2 + \arcsin \frac{4}{5}$. (4p)
 5. Beräkna arean av området $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\cos x}{3+3\sin x - \cos^2 x} \right\}.$ (5p)
 6. Låt $f(x) = x^2 + 4x - (4x+2)\ln x$.
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter, konvexitet/konkavitet. (6p)
 - b) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = 0$. (5p)
 - c) Funktionen h ges av $D_h = [1, \infty)$ och $h(x) = f(x)$ för $x \in D_h$.
 Visa att h är injektiv och beräkna $Dh^{-1}(e^2 - 2)$. (2p)
 7. a) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$. (1p)
 - b) Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{x}$ för $x \neq 0$.
 Är f kontinuerlig i 0? (2p) Är f deriverbar i 0? (3p) (5p)
 8. a) Visa att om funktionerna f och g är deriverbara i a så är även $f + g$ deriverbar i a och $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. (3p)
 - b) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (4p)
 - c) Definiera funktionen $\ln x$ och visa att $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ($a, b \in (0, \infty)$). (4p)

BB

Tentamen i matematik E1, del A, 94-10-31, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivnings omslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad !

- =====
1. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^N (3k^2 - 3k + 1) = N^3$ för alla naturliga tal N . (5p)
 2. Konstruera kurvan $y = \frac{1}{x} + 2 \arctan(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter, konvexitet och konkavitet. (6p)
 3. Bestäm en primitiv funktion till $\frac{\sin^3(x) + \sin(x)}{\cos^3(x) + \cos(x)}$. (5p)
 4. Låt $f(x) = \frac{\cosh(x) - x \sinh(x)}{(\cosh(x))^2}$.
 - a) Visa att f har ett nollställe i $(1, \frac{3}{2})$. (2p)
 - b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (2p)
 - c) Beräkna $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) dx$. [Ledn: integrera partiellt $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx$] (5p)
 5. Låt $f(x) = x \ln(e^{\sin(x)} \sin(|x|))$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.
 - a) Visa att f är kontinuerlig i 0. (3p)
 - b) Är f deriverbar i 0? (2p)
 - c) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. (4p)
 6. Hur många lösningar har ekvationen $\ln((a \cos(x))^2) + 4 \cos(x) + 3x^2 = 0$ i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ($a \in \mathbb{R}$)? (6p)
 7. Definiera funktionen $\arctan(x)$ och härled ett uttryck för dess derivata. (4p)
 8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (6p)

BB

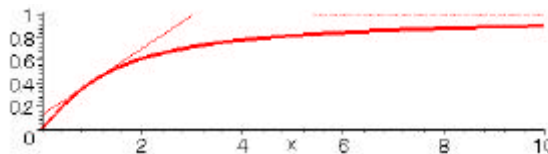
Svar till tentorna i matematiska metoder del A för E1 (ht 2002)

02-08-19

3) $n = 5$, konstanta termen = 60

4a) $V_f = (0,1)$, $y = 1$ är asymptot, f är konkav

b) $x - (2 + \sqrt{2})y = 1 - \sqrt{2}$



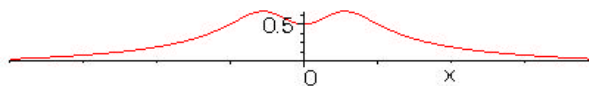
5) $D_f = [0,2)$, $f(x) = 3\ln(x-3) + 2(\sqrt{x} \sinh(\sqrt{x}-1) - \cosh(\sqrt{x}-1) - \ln(2-x) + 1)$

02-01-15

1) $\{(x,y) : -1 \leq x \leq 2, 0 < y < 1\}$ 4) $\frac{\pi}{4}$ 5a) $\frac{2}{4-\pi}$ b) $\frac{\ln 3}{\pi} + \ln 2 - \frac{2}{3}$ 7) $x + \pi y = \pi$

6) asymptot: $y = 0$, lok. min: $(0, \frac{1}{2})$

lok. max: $(\pm \sqrt{\sqrt{5}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{5}+1})$



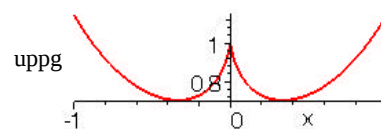
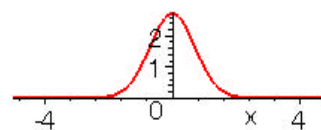
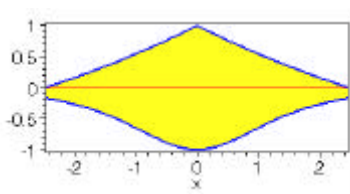
01-01-10

1b) nej 2) 24 4a) $(0, e)$ är max-punkt, $y = 0$ är asymptot

f är konvex i $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och konkav i $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

5) $4(\arctan e^{\frac{\pi^2}{4}} - 1) + \pi$

6) 0 7b) nej



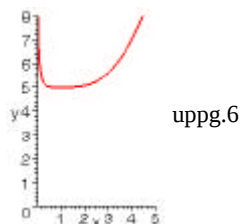
00-10-20

2) 495 4) π 5) $\ln \frac{4}{3}$

6a) f är str. konvex, $(1,5)$ är min-punkt, $x = 0$ är asymptot

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 2x - (2x^2 + 2x)\ln x$ c) $\frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)}$

7b) f är deriverbar



94-10-31

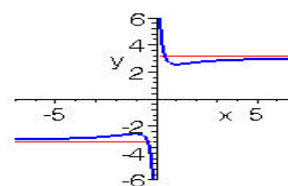
2) max/min: $\pm(1, 1 + \frac{\pi}{2})$, asymptoter $x = 0, y = \pm\pi$

f är konvex i $(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}] \cup (0, \sqrt{1+\sqrt{2}}]$,

konkav i $[-1, 0) \cup [\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty)$

3) $\ln(\cos^2 x) - \frac{3}{2}\ln(\cos^2 x + 1)$ 4b) 0 c) 0 5b) nej c) 2

6) $|a| < e^{-2}$: 0 lösn., $|a| = e^{-2}$: 1 lösn., $|a| > e^{-2}$: 2 lösn.



Lycka till!

Bernhard