

INSTUDERINGSUPPGIFTER

Du lär dig väldigt mycket av att prata med andra, att behöva förklara för andra dina idéer, lösningar, vad du gjorde, vad du menade. Gåihop i smågrupper (högst 4), lös några av dessa uppgifter hemma, åminstone dem du får lösningar till, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt och ta med dem till räknestugan eller någon annanstans, där ni ("smågruppen") träffas och "försvara" dem i gruppen, titta kritiskt på de andras lösningar, diskutera dem och allt kringliggande: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Kanske måste ni först gå igenom (delar av) föreläsningen?

Utnyttja även räksnedaren och SI-grupperna.

Tänk på att du måste träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt.

Uppgifterna är tentamensuppgifter!

Samtidigt delas ut "repetitionsfrågor"; ta gärna upp dem också i diskussionen, de liknar teorifrågor på tentan och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte.

Lösningar (ev. med kommentarer och nya frågor) delas ut till vissa uppgifter. Gå igenom dem, jämför dem med dina lösningar, men titta aldrig på dem innan du har försökt själv!!!

INSTUDERINGSUPPGIFT 1 (logik, induktion)

- 1) Finns det heltal m, n , $m \cdot n \neq 0$ sådana att $m\sqrt{2} + n\sqrt{3}$ är ett rationellt tal?
(svar: nej)

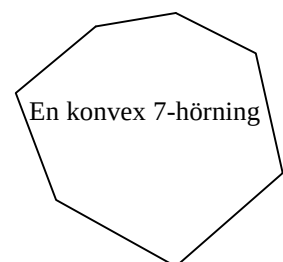
- 2) Visa med induktion att $2 \sum_{k=1}^N (-1)^{N+k} k^2 = N + N^2$ för alla $N \in \mathbb{N}$.

Denna uppgift får ni lösning till. Lös den v38!

- 3) Låt $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ och $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ för $n \in \mathbb{N}$.

Visa med induktion att $a_n = 2^n + 3^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

- 4) En N -hörning kallas konvex om alla vinklar är mindre än π .
Visa att vinkelsumman i en konvex N -hörning är $(N - 2) \cdot \pi$
för varje $3 \leq N \in \mathbb{N}$.



REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 2002

Moment 1: logik, mängdlära, Boolesk algebra

1. Vad är en matematisk utsaga?
2. Definiera $\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q$ (P, Q matematiska utsagor) och visa att $P \Rightarrow Q, \neg P \vee Q$ och $\neg Q \Rightarrow \neg P$ är ekvivalenta utsagor.
3. Definiera $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \Delta B$ (A, B mängder).
4. Vad är en Boolesk algebra? Exempel?
Vilka räkneregler gäller i en Boolesk algebra?
5. Vad är mängderna $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$? Kan du visa att $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$?
6. Vad är potensmängden $P(M)$? Vad är (den kartesiska) mängdprodukten $A \times B$?
7. Vad är en relation? Vad är en funktion? Vad menas med $f: X \xrightarrow{x \mapsto y} Y$?
8. Vad är vitsen med induktionsaxiomet? Kan du genomföra ett induktionsbevis?

För att utnyttja platsen får ni undantagsvis redan här lösningen till uppgift 2, men OBS, försök verkligen att skriva ner hela beviset först själva utan att titta på det här!

Lösning av uppg. 2, bevis med induktion:

I. För $N = 1$ gäller

$$VL = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 2 = 1 + 1^2 = HL, \text{ påståendet är alltså sant då}$$

II. Antag nu att påståendet är sant t.o.m. ett visst $1 \leq p \in \mathbb{N}$, dvs. att

$$2 \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} k^2 = p + p^2.$$

Vi skall visa att påståendet då är sant även för $p+1$, dvs. att

$$2 \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{p+1+k} k^2 = (p+1) + (p+1)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Bevis: } VL &= 2 \sum_{k=1}^p (-1)^{p+1+k} k^2 + 2 \cdot (-1)^{p+1+p+1} \cdot (p+1)^2 = \\ &= -2 \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} k^2 + 2(p+1)^2 = [\text{enligt antagandet}] = -p - p^2 + 2(p+1)^2 = \\ &= (p+1)(-p + 2(p+1)) = (p+1)(p+2) = HL \end{aligned}$$

vsv

III. Induktionsaxiomet ger nu att påståendet (pga. I. och II.) gäller för alla $N \in \mathbb{N}$.

vsv