

INSTUDERINGSUPPGIFT 3 (tillämpning av derivata)

- A)** Låt $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$.
- Visa att f är kontinuerlig på $[0, \infty)$.
 - Visa att f är injektiv på $[1, \infty)$.
 - Är f injektiv i intervallet $(0, 1)$?
- B)** Låt $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$.
- Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?
 - Visa att f är injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$.
 - Visa att f är strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty)$.
 - Låt $g(x) = f(x)$ för $x \in D_g = [\frac{2}{\pi}, \infty)$. Beräkna $D(g^{-1})(\frac{9}{2\pi^2})$.

Extrauppgifter

- 5)** Visa att $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$ för $0 < a < b < \pi$.
- 6)** Visa att för positiva x gäller: $2^x < x^2 \Leftrightarrow 2 < x < 4$ (det ger t.ex. $2^e < e^2$).
- 7)** Låt $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$, $D_f = (0, \frac{\pi}{2})$.
Visa att f är injektiv, bestäm värdemängden V_f och $D(f^{-1})(\frac{3}{2\pi})$.
svar: $(0, \frac{2}{\pi})$, $\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi - \sqrt{3})}$
- 8)** Låt $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.
Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?
Rita kurvan $y = f(x)$ med angivandet av asymptoter och konvexitet/konkavitet.
svar: se datorlabben, ex. 13: f udda, konvex i $(0, \infty)$, $y = 0$ är asymptot, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

$D_f = \{x : x \neq 0 \wedge x \leq 1 \wedge 2x \leq 1\} = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$. Eftersom f är sammansatt av kontinuerliga funktioner så är f kontinuerlig (på hela D_f !), vidare är f deriverbar i $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, ty f är sammansatt av funktioner som är deriverbara i alla inre punkter i D_f . För att lättare kunna beräkna gränsvärdena och derivatan skriver vi om f (ändamålsenligt):

$$f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right) = \frac{\sqrt{1-x} \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}}, & \text{då } x > 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{-\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}\right)}, & \text{då } x < 0 \end{cases}.$$

[obs: $\sqrt{x^2} = -x$ då $x < 0$!] Detta ger att $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$, f saknar alltså

gränsvärde då x går mot 0. Vidare är för $x < 0$ $f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{-\frac{1}{x} + 2}{-\frac{1}{x} + 1}}}$, det ger att

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$, linjen $y = 1 - \sqrt{2}$ är alltså asymptot då $x \rightarrow -\infty$. För $x > 0$ är

$$f'(x) = \frac{\frac{-(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \right)}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-2x}(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x})^2} > 0,$$

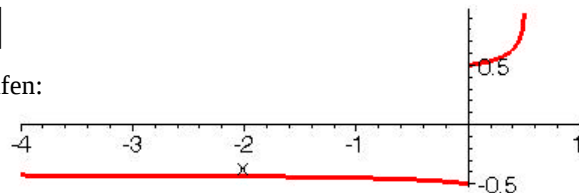
och för $x < 0$ är då $f'(x) < 0$ (minustecken!). Detta visar att $f(\frac{1}{2}) = 1$ är f 's största värde

och s.o.m.v. ger att f antar alla värden mellan $1 - \sqrt{2}$ och $-\frac{1}{2}$ och mellan $\frac{1}{2}$ och 1.

Därmed har vi bestämt $V_f = (-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$

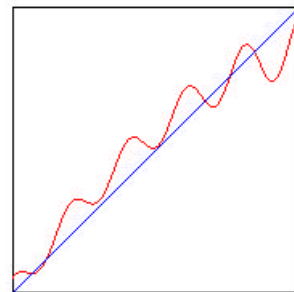
[obs: $1 - \sqrt{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$].

grafen:



Lösningsförslag till extrauppgift 2

Åskådligt är det klart: eftersom f är kontinuerlig och $0 \leq f(x) \leq 1$ så borde väl kurvan $y = f(x)$ någonstans korsa linjen $y = x$. Ett strängt bevis för det får vi så här: om $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ så är vi färdiga (0 eller 1 är fixpunkt då); om $f(0) \neq 0$ och $f(1) \neq 1$ så gäller för funktionen $g(x) = f(x) - x$: g är kontinuerlig på $[0, 1]$, $g(0) > 0$ och $g(1) < 0$, värdet 0 ligger mellan värdena $g(0)$ och $g(1)$, enligt satsen om mellanliggande värden finns det då ett $x_0 \in [0, 1]$ (i själva verket $x_0 \in (0, 1)$) där g antar värdet 0, dvs. $f(x_0) = x_0$.



vsv