Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del A (TMA042), ht 2003

Det finns utmärkta hjälpmedel (*MATLAB*, *maple*, *mathematica*, *Mathcad*, *Derive*...) som underlättar "räknandet", men som framför allt kan öka förståelsen. Vi utnyttjar *maple* i varje mattekurs (senare även MATLAB). Du skall inte lära dig ett programspråk e.d., utan helt enkelt att på ett naturligt sätt använda *maple* som en slags räknedosa, bara att du kan göra mycket mera och dessutom enklare med *maple* än med en dosa. **Syftet** är att du skall bekanta dig med och börja använda *maple* för att öka förståelsen för det du just håller på med i matten, men även för att kunna utnyttja det senare och i andra kurser (t.ex. i mekanikkursen i lp3).

Detta lär du dig enkelt och effektivt genom att sätta dig vid datorn och skriva in det du vill göra, inte genom att läsa något (learning by doing !). Försök, experimentera, tänk med, kolla alltid *maple*'s svar. Du märker snart hur "naturligt" det är, oavsett om du räknar numeriskt eller symboliskt, om du löser ekvationer eller olikheter eller om du visualiserar dina resultat. Kom igång så fort som möjligt, du kan sedan alltid förbättra dina färdigheter m.h.a. det inbyggda hjälpsystemet.

- Må 6/10 (8-10) introduceras *maple*. Men bäst lär du dig *maple* själv, börja med bifogade *maple*-exempel eller/och öppna *intro.mws* – filen och kör *New User's Tour*!
- Uppgift 1, 2 och 3 kan ge 1 bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder, del A, 03/04.
- Dela upp labben: uppg. 1), 2) kan du sätta i gång med omedelbart, uppg. 3) bör du göra lv 6/7.
- Uppgifterna skall lämnas till mig senast fr, 17/10, kl. 9^{45} (efter föreläsningen). Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Laborationen lämnas tillbaka med del A-tentan.

Uppgift 1 (algebraiska räkningar, olikheter)

a) För vilka reella x gäller $|x^2-1| < |2x-3|$?

b) Bestäm definitionsmängden till $\sqrt{x+5+\frac{9}{x-5}}$.

c) Faktoruppdela ditt personnummer.

Uppgift 2 (funktioner, gränsvärde, derivata)

a) Låt $f(x) = \dfrac{x\ln x + 3\sin x + 7x}{\sqrt{x}}$.

a1) Beräkna $f(1)$, $f'(x)$, $f'(1)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$.

a2) Rita kurvan $y = f(x)$ för $0 < x < 40$, för $0 < x < 16$ och för $0 < x < 1$.
Då tror du väl att f är injektiv? Nix! Rita kurvan även för $0 < x < 0.00005$!

[Moral: Lita aldrig på figurer!]

b) Låt $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.

b1) Rita kurvan för $-9 < x < 9$.

b2) Visa <u>med datorn</u> att f är jämn, kontinuerlig i 0 och har x-axeln som asymptot.

b3) Avgör med datorn om f är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

<u>Uppgift 3 (integral)</u>

a) Beräkna $\displaystyle\int \frac{ax+b}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$, $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2} \right) dx$ och $\displaystyle\int_1^t \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2} \right) dx$.

b) Låt $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - 2x^2 - x + 6}{x^6 - 4x^4 - x^2 + 4}$.

b1) Partialbråksuppdela $f(x)$.

b2) Beräkna m.h.a. *maple* en primitiv funktion F till f och rita grafen $y = F(x)$ för $-5 \leq x \leq 7$. Vilken primitiv funktion fick du?

c) Låt $f(x) = x^{\frac{4}{3}}(2-x)\ln(2-\frac{x}{\pi})\left(2 - e^{-x} x \sin(x) \cos(2\sqrt{x})\right)$.

c1) Rita grafen till f för $0 \leq x \leq \pi$ och tre Riemannsummor $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ till f <u>i ett diagram</u>: välj n lika långa delintervall, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, och $\xi_k = x_{k-1}$ = vänstra randpunkten, resp. $\xi_k = x_k$ = högra randpunkten, resp. $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ = mittpunkten) $(k = 1 \cdots n,$ lämpligt $n > 50)$.

c2) Beräkna Riemannsummorna i **c1)** för $n = 37$, för $n = 237$ och ”mittsumman” även för $n = 1000$; jämför sedan dessa värden med *maple*:s värde av $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$.

Ger Riemannsummor en bra approximation av bestämda integraler?

<u>Extrauppgift</u>

Låt $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$ och $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$.
Bestäm D_f och D_g och rita kurvorna $y = \pm f(x),\ x \in D_f$ och $y = \pm g(x),\ x \in D_g$ i samma diagram. Beräkna även arean av det område som omslutes av kurvorna.

Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

A. Allmänt

- Lämna in hela ditt "worksheat" (alltså alla kommandon och *maple*'s svar)! Skriv ditt namn och ditt personnummer längst upp på varje blad, på första sidan med *maple*.
- I PC-versionen kan du se var *maple* bryter sidor: *arkiv: Print Preview*!
- OBS: du skall alltid kommentera dina lösningar/resultat (gärna för hand)!
- Förbered dig noggrant innan du sätter dig vid datorn: studera uppgifterna först; lös dem för hand så långt som möjligt (nästan alla har varit tentamensuppgifter!), läs igenom materialet från "datorintroduktionen". Sedan kan du sätta igång ganska omedelbart: gå igenom bifogade exemplen först, de innehåller allt vad du behöver och lite till. Är du osäker på något, så läs den utförliga on-line-hjälpen i *maple*, som du får med ?, prova t.ex. ?*plot*, eller ?*D*, eller varför inte ??. Ändå fiffigare: tryck helt enkelt *ctrl* och *F1*, så kommer on-line-hjälpen om det ord cursorn står på eller precis efter, eller klicka på "*Help*".
- Du kan förse figurerna med en titel (*title* = `*din text*`, obs: fnuttar!), rita noggrannare (*numpoints* = n, $n \in I\!N$, default är $n = 50$, se ex13), med annan färg (*color* = ...) och tjockare (*thickness* = m, $m \in \{0,1,2,3\}$), läs ?*plot*[*options*]! Rita gärna med *animatecurve* (finns i plotpaketet >*with*(*plots*)); markerar du då grafen så får du upp en verktygsrad där du kan "spela upp" grafen, välja hastighet, riktning m.m.…!

B. Till uppgifterna

1) **a),b)** Olikheter (och ekvationer) löser du med >*solve*, kolla noggrant ex8. Absolutbeloppet skrives *abs*. Svara med intervall!

c) T. ex. $9301216553 = 101 \cdot 139 \cdot 662527$, det fås med *ifactor*, se ex2.

2) **a)** Se ex 9-15; ta minst 900 "*numpoints*"!

b) Att f är jämn kan du ju "räkna ut" ($f(x) - f(-x) = ...$), men även det finns i *maple*: >*type*(*f*(*x*),*evenfunc*(*x*)). Beräkna höger- och vänstergränsvärdet för att vara säker att gränsvärdet existerar; att de är lika, kan du snyggt kolla med "Boolesk evaluering": >*evalb*(*limit*(*f*(*x*),*x*=0,*left*)= *limit*(*f*(*x*),*x*=0,*right*)); $\lim_{x\to\infty} f(x)$ får du med >*limit*(*f*(*x*), *x*=*infinity*). Gå igenom de utförliga exemplen 14 och 15!

b3): du måste kolla om $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$ existerar; kolla höger- och vänstergränsvärdet!

3) **a)** Integrerar gör du med >*int*(*f*(*x*),*x*) för obestämd integral, resp. med >*int*(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*) för bestämd integral; vill du först "se" din integral, så skriv *Int* i st.f. *int* och sedan *value*(%).

b) Partialbråksuppdelningen får du med >*convert*(*f*(*x*),*parfrac*,*x*), se ex16; vad upptäcker du (kör även *simplify* först)? *Maple* räknar fram allmänna (komplexa) lösningar; för att få reellvärda funktioner (och för att kunna rita) måste du skriva om dem, t.ex. $\ln|x|$ i st.f. $\ln x$; inversa sinh-, tanh- och cosh -funktionerna kan du skriva m.h.a. ln genom att "konvertera" dem: se ex16. *Maple* ger en primitiv funktion med konstanten $c = 0$, vilken primitiv funktion får du då? (beräkna t.ex. *F*(0)…., svara: den lösning som går genom punkten ...!).

c) Ladda in *student*-paketet, då kan du rita funktionen och de tre efterlysta Riemannsummorna med >*leftbox*(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*); osv., färgen kan du välja med *shading*=…, beräkna Riemannsummorna med *leftsum*(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*); osv. och sedan >*evalf*...; svara! Se ex17.

Extrauppgift: Ledning: D_f = ? Lös olikheterna ”uttrycket under roten ≥ 0”. Rita de 4 kurvorna gärna först var för sig (med *animateplot*!), sedan tillsammans m.h.a. *display*. Rita 1:1, det kan du klicka fram i efterhand, men bäst är att du skriver in det: >*scaling=constrained*. Du får en välkänd sluten kurva (”kardiod”). Arean är $\frac{3\pi}{2}$.

C. Tillägg

Du kan göra det mesta med *maple* och hitta det lätt på egen hand. Några tips:

- **Binomialkoefficienterna** beräknas med *binomial* som finns i kombinatorik-paketet (laddas in med >*with*(*combinat*)); t.ex. fås "7 *över* 4" med >*binomial*(7,4) (=35).
- **Mängdoperationer:** läs om *powerset*, *subset*, *choose*, *permute*: *maple* kan bilda alla delmängder, alla delmängder med ett visst antal element, alla omordningar ...av en ändlig mängd. Snittet, unionen och mängddifferensen beräknas med *intersect*, *union*, *minus*; för det behöver du inte ladda in något paket.

Anmärkning: I exempel 14 löser vi följande tentamensuppgift med datorn:

Låt $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ för $0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ och $f(0) = a$. Bestäm a så att f är kontinuerlig i 0.

Det klarar vi även utan dator: bara "standardgränsvärden" får (och skall) användas för att beräkna $a = \lim_{x\to 0} f(x)$. Flera "omskrivningar" är möjliga, t.ex.

$\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \dfrac{\ln(1+(\cos x - 1))}{x^2} = \dfrac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \dfrac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})(-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot x^2}$; så nu är det klart, ty

$\dfrac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ då $h \to 0$ $\left(h = -2\sin^2\frac{x}{2} \to 0 \text{ då } x \to 0\right)$ och

$\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to -\dfrac{1}{2}$ då $x \to 0$ ty $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$ då $t \to 0$ $\left(t = \frac{x}{2} \to 0 \text{ då } x \to 0\right)$ … .

LYCKA TILL !

Bernhard