

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2003-08-18, kl. 14.15–18.15**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Alex Herbertsson, tel. 0740 - 459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

=====

1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra med $0 \neq 1$.

Betrakta på stå endet P : för $x, y \in M$ gäller $x = x + y \cdot x'$.

a) Visa att P är falskt. (2p)

b) Finn felet i följande "bevis" av P :

Multiplikation av vänsterled och högerled med x ger:

$$\begin{cases} VL \cdot x = x \cdot x = x \\ HL \cdot x = x \cdot x + y \cdot x' \cdot x = x + 0 = x \end{cases} \Rightarrow \underline{VL = HL} \quad \text{vsv.} \quad (2p)$$

2. Visa med induktion att för alla naturliga tal $n \geq 4$ gäller $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{n}$. (6p)

3. Låt $f(x) = \arctan \frac{2x+1}{2\sqrt{1-x-x^2}}$.

a) Bestäm D_f och V_f . (5p)

b) Visa att $f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\sqrt{1-t-t^2}} dt$ för $x \in D_f$. (4p)

c) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}(\frac{\pi}{4})$. (4p)

d) Rita $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)

4. Visa att $\ln \sqrt{\cosh(2x)} > \tanh^2(x)$ för alla $0 \neq x \in \mathbb{R}$ $\left(\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \right)$. (5p)

5. Beräkna arean av det område i planet som begränsas av x -axeln, y -axeln, linjen $x = -2$ och kurvan $y = \frac{14-2x}{x^3-7x+6}$. (6p)

6. Funktionen f ges av $f(0) = 0$ och $f(x) = \sqrt[3]{x} \ln(|\sin x|)$ för $0 \neq x \in D_f = (-\pi, \pi)$.
Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? (4p)

7. a) Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion och $a \in D_f$.

Är följande på stå ende P_1 resp. P_2 sant eller falskt (bevisa dina svar!):

P_1 : Om f är kontinuerlig i a så är f deriverbar i a .

P_2 : Om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a . (4p)

b) Definiera funktionen $\arcsin x$. (2p)

c) Definiera $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow a$. (2p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2003-01-14, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Alex Herbertsson, tel. 0740 - 459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

=====

1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller

$$x' \cdot y' = (x \cdot y)' \cdot (x \oplus y)'. \quad (4p)$$

2. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n (2k-3)3^{k-1} = 2 + (n-2)3^n$ för $n \in \mathbb{N}$. (5p)

3. Beräkna $\arctan 2 + \arctan 3$. (4p)

4. Låt $f(x) = 2 \arctan(x) - \arctan(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}(-\frac{3\pi}{4})$. (5p)

b) Bestäm värdemängden till f . (3p)

5. Beräkna arean av området $\{(x, y) : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{10 \cos x}{7 - 3 \cos^2 x - \sin^4 x}\}$. (5p)

6. Låt $f(x) = \frac{e^x \cosh(x)}{\cosh(2x)}$.

a) Beräkna en primitiv funktion till f . (4p)

b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (5p)

7. Visa att $\ln(1+x^4) > 2 \arctan(x^2) - 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. [Du får utnyttja att $\pi < 3.15$] (5p)

8. a) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (4p)

b) Definiera binomialkoefficienterna $\binom{m}{n}$. (2p)

c) Visa att funktionen $x \mapsto \sin(x)$ är deriverbar
[du får utnyttja att $\cos(x)$ är kontinuerlig och $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$]. (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2002-01-15, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Erik Broman, tel. 0740 - 459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $A = [-1, 2]$ resp. $B = (0, 1)$ (slutet, resp. öppet intervall i $\mathbb{R}$).
Ange den kartesiska mängdprodukten $A \times B$. (2p)
 2. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:
 $(x \cdot y) \oplus (x \oplus y) = x + y$. (4p)
 3. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n 3k(k+1) = n(n+1)(n+2)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)
 4. Beräkna det exakta värdet av $\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{4}$. (4p)
 5. Låt $f(x) = x^2 + \ln(1+x^2) - 2x \arctan x$, $D_f = [0, \infty)$, $g(x) = \frac{2 \sin(\pi x)}{\cos^4(\frac{\pi}{2}x) - 4}$.
 - a) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}(1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2})$. (6p)
 - b) Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna
 $y = f(x)$, $y = g(x)$ och $x = 1$ (4p var för $\int f(x)dx$ resp. $\int g(x)dx$). (9p)
 6. Rita kurvan $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{4+x^4}}$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)
 7. Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Visa att f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ (3p)
och ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(\pi, 0)$ (3p). (6p)
 8. a) Visa att om funktionerna f och g är deriverbara i a så är även $f + g$
deriverbar i a och $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. (3p)
b) Visa att en funktion som är deriverbar i en punkt a är även kontinuerlig i a . (3p)
c) Definiera funktionerna $\ln x$ och $\exp(x)$ (motivera väl). (3p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2001-01-10, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Johan Hoffmann, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$, $x \oplus y = x' \cdot y + x \cdot y'$.
 - a) Visa att $x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$. (4p)
 - b) Gäller $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$?
 [Tips b): betrakta $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbb{N} \rangle$ och $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2, 3\}$] (2p)

 2. Hur många olika fyrasiffriga tal kan bildas med siffrorna 1, 3, 5, 7? (3p)

 3. Visa med induktion att $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln\left(\frac{n^4 - n^2}{12}\right)$ för alla $3 \leq n \in \mathbb{N}$. (5p)

 4. Låt $f(x) = e^{1-x^2}$.
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (6p)
 - b) Visa att $f(x) > 3 - 2x$ för $1 \neq x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$. (4p)

 5. Beräkna arean av området $D = \{(x, y) : |x| \leq \frac{\pi^2}{4}, \frac{-1}{\cosh x} \leq y \leq \cos \sqrt{|x|}\}$. (5p)

 6. Visa att $0 < \cosh x - \cos x < x \sinh x$ för alla $0 \neq x \in \mathbb{R}$ och beräkna med hjälp härav $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x}$. (6p)

 7. Låt $f(x) = \sinh(|x|)^{\sin|x|}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.
 - a) Visa att f är kontinuerlig i 0. (3p)
 - b) Har $f'(x)$ ett gränsvärde då x går mot 0? (1p för rätt $f'(x)$). (2p)

 8.
 - a) Visa att om $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f växande på (a, b) . (4p)
 - b) Vad är en injektiv funktion? (2p)
 - c) Definiera funktionen $\arctan x$ och visa att $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2000-10-20, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Martin Adiels, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

- =====
1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:
 $x' \cdot y' = x \cdot y + x' \cdot y' \Leftrightarrow x' + y' = 1.$ (4p)

 2. I ett system med 12 komponenter är 4 komponenter sönder.
 På hur många olika sätt kan detta inträffa? (3p)

 3. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n k(3k-1) = n^2(n+1)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)

 4. Beräkna $2 \arctan 2 + \arcsin \frac{4}{5}.$ (4p)

 5. Beräkna arean av området $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\cos x}{3+3\sin x - \cos^2 x} \right\}.$ (5p)

 6. Låt $f(x) = x^2 + 4x - (4x+2)\ln x.$
 - a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter, asymptoter, konvexitet/konkavitet. (6p)
 - b) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = 0.$ (5p)
 - c) Funktionen h ges av $D_h = [1, \infty)$ och $h(x) = f(x)$ för $x \in D_h.$
 Visa att h är injektiv och beräkna $Dh^{-1}(e^2 - 2).$ (2p)

 7. a) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1.$ (1p)
 b) Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{\cosh x - \cos x}{x}$ för $x \neq 0.$
 Är f kontinuerlig i 0? (2p) Är f deriverbar i 0? (3p) (5p)

 8. a) Visa att om funktionerna f och g är deriverbara i a så är även $f + g$ deriverbar i a och $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$ (3p)
 b) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (4p)
 c) Definiera funktionen $\ln x$ och visa att $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ($a, b \in (0, \infty)$). (4p)

BB

Svar till tentorna i matematiska metoder, tma042, del A (E1), ht 03

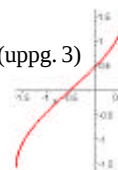
03-08-18

3a) $D_f =]-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$, $V_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c) $Df^{-1}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{10}}{4}$

d) f är konkav i $]-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{1}{2}[$, konvex i $[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$

5) $4\ln 3 - 2\ln 2$ 6) f är kontinuerlig, men ej deriverbar (i 0)

$y = f(x)$ (uppg. 3)

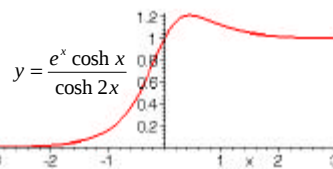


03-01-14

3) $\frac{3\pi}{4}$ 4a) $\frac{1}{2}$ b) $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ 5) $\pi + \ln 3$

6a) $\frac{1}{4}\ln(e^{4x} + 1) + \frac{1}{2}\arctan e^{2x} + c$

b) max-punkt $(\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}))$, asympt. $y = 0, y = 1$

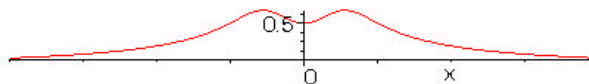


02-01-15

1) $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 2, 0 < y < 1\}$ 4) $\frac{\pi}{4}$ 5a) $\frac{2}{4-\pi}$ b) $\frac{\ln 3}{\pi} + \ln 2 - \frac{2}{3}$ 7) $x + \pi y = \pi$

6) asymptot: $y = 0$, lok. min: $(0, \frac{1}{2})$

lok. max: $(\pm\sqrt{\sqrt{5}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5}+1})$



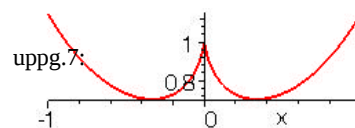
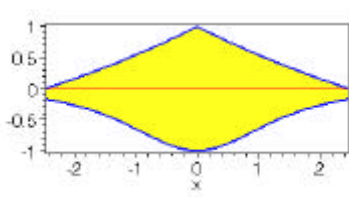
01-01-10

1b) nej 2) 24 4a) $(0, e)$ är max-punkt, $y = 0$ är asymptot,

f är konvex i $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ och konkav i $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

5) $4\left(\arctan e^{\frac{\pi^2}{4}} - 1\right) + \pi$

6) 0 7b) nej



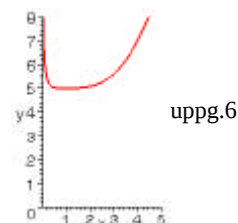
00-10-20

2) 495 4) π 5) $\ln \frac{4}{3}$

6a) f är str. konvex, $(1, 5)$ är min-punkt, $x = 0$ är asymptot

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 2x - (2x^2 + 2x)\ln x$ c) $\frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)}$

7b) f är deriverbar



OBS: på sista föreläsningen demonstreras tenta 03-08-18

Lycka till!

Bernhard