

INSTUDERINGSUPPGIFT 2 (funktioner, gränsvärde)

Låt $f(x) = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} \right)$.

- Bestäm D_f . Är f kontinuerlig?
- Beräkna $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Har f ett gränsvärde då x går mot 0?
- Låt g vara restriktionen av f på $]-\infty, 0[$ (funktionen g definieras genom $D_g =]-\infty, 0[$ och $g(x) = f(x)$ för $x \in D_g$).

Visa att g är injektiv och ange g^{-1} .

[Denna uppgift löser du nästa vecka mycket enklare m.h.a. derivatan!]

Extrauppgifter

- Visa entydigheten av gränsvärdet: $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \right) \Rightarrow (A = B)$.
- Låt P_1, P_2 vara två punkter i planet;
beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} |d(P_1, (x, 0)) - d(P_2, (x, 0))|$ och tolka svaret.
[$d(P, Q)$ är avståndet mellan punkterna P och Q].
- Visa fixpunktsatsen:
Om $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ är kontinuerlig med $D_f = [0, 1]$ så finns det en punkt $x_0 \in [0, 1]$ så att $f(x_0) = x_0$ (en sådan punkt kallas *fixpunkt* till f).
- Emil och Emilia har gjort en smörgås: en rund brödskiva med schweizerost på (den där med många hål). Kan de dela mackan med ett rakt snitt så att bägge får lika mycket bröd och lika mycket ost?
(svar: teoretiskt ja, visa det! I praktiken nej (visa inte det)).

DUGGA

Lördag 27 september ges en **övningstenta**, tid: kl.8.45-10.45, plats: V.

Den är en viktig del av inläringen. Du får kontroll på hur bra du redan behärskar stoffet och, mycket viktigt även det, hur bra du kan skriva ner dina lösningar.

En övningstenta är en "halv tenta": den består av tre problemuppgifter och en teorifråga som tillsammans kan ge 25p, skrivningstiden är 2 timmar.

För varje 6p på denna tenta får du 1p som läggs till dina poäng på del A tentorna innevarande år (ej senare).

Stoff:

Förutom moment från förberedande kursen (kvadratkomplettering, visa olikheter, räkna korrekt med potenser) innehåller övningstentan Boolesk algebra, (induktions-) bevis, potensfunktioner, gränsvärde, kontinuerliga funktioner.

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 2003

Moment 2: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet, elementära funktioner

1. Kan du skriva upp definitionerna för $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$,
 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow a$ ($a \pm, \pm\infty$) ?
2. Vilka "gränsvärdesregler" användes i exempel 32 sid. 82 i kursboken?
3. Kan du visa gränsvärdesreglarna?
4. Vad är en kontinuerlig funktion? Varför är kontinuitet en så viktig egenskap?
5. Vad är en deriverbar funktion? Är en kontinuerlig funktion deriverbar?
Är en deriverbar funktion kontinuerlig?
6. Stämmer på stå endet: $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f'(x) \Rightarrow f$ deriverbar i a ?
7. Kan du (formulera och visa) deriveringsreglarna?
8. Vad ger $f'(a)$? Kan du skriva upp en ekvation för tangenten?
9. Vad är en injektiv funktion? Vad är f^{-1} ? Kan du derivera f^{-1} och visa din formel?
10. Vad är lokala extrempunkter (lokala maxima/minima)?
Hur kan du eventuellt hitta dem m.h.a. derivatan?
11. Vad är en stationär punkt? Är stationära punkter (lokala) extrempunkter?
12. Kan du (formulera, visa) Lagranges sats? Vilka tillämpningar har Lagranges sats?
13. Vad menas med att en funktion är växande/avtagande, konvex/konkav?
Hur kan du eventuellt m.h.a. derivatan avgöra om en funktion är växande/avtagande,
resp. konvex/konkav? Injektiv? Är en strängt konvex funktion injektiv? Deriverbar?
14. Hur definieras funktionerna
 $\ln x$, e^x , x^a , $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\theta(x)$?
Kan du visa att dessa funktioner är kontinuerliga och härleda derivatorna till dem?
15. Kan du standardgränsvärdena (kan du visa dem)
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$?