

övningar på induktion

ind1. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \neq 1).$

ind2. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} k^2.$

ind3. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$

ind4. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$

ind5. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$

ind6. Visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$

ind7. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$

ind8. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^n k \cdot (k!) = (n+1)! - 1.$

ind9. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$

ind10. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att

- a) $4^{2n} + 4$ är delbart med 20.
- b) $8^n - 7n - 1$ är delbart med 7.

ind11. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

- a) $3^n \geq n^3.$
- b) $(n!)^2 < 2^{n^2}.$

ind12. Visa med induktion att en mängd med n element har 2^n delmängder.

ind13. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

ind14. Visa att för alla naturliga tal $n \geq 4$ gäller

$$D^n \ln \left(\frac{1}{|x^2 - 1|} \right) = (-1)^n (n-1)! \left(\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

övningar på arcusfunktioner

arc1. Beräkna

- a) $\cos(2 \arctan \frac{1}{2})$.
 b) $\sin(\arctan 2 - \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}})$.
 c) $\tan(\frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25})$.

arc2. Beräkna

- a) $\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{4}$.
 b) $2 \arctan 2 + \arcsin \frac{4}{5}$.
 c) $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

arc3. Lös ekvationen

- a) $\arctan x = \arccos(2x)$.
 b) $\frac{1}{(\sin(\arctan x))^2} - \frac{1}{(\tan(\arcsin x))^2} = 4x^2$.

arc4. Rita funktionen

- a) $y = \arctan \frac{e^x - 1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{e^x - 4}{\sqrt{3}e^x}$.
 b) $y = 2 \arctan x + \arctan \frac{2x}{x^2 - 1}$.

arc5. Beräkna f^{-1} då

- a) $f(x) = \sinh x$.
 b) $f(x) = \tanh x$.

svar: **arc1:** a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{4}$

arc2: a) $\frac{\pi}{4}$ b) π c) $\frac{\pi}{4}$ (med denna formel beräknade *J. Machbin* (~1705) talet π med 100 decimaler!)

arc3: a) $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}$ b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

arc4: funktionerna är (styckvis) konstanta: a) $y = \frac{\pi}{3}$ b) $y = \begin{cases} -\pi, & x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ \pi, & x > 1 \end{cases}$

arc5: a) $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ b) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

standardgränsvärden

$\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0 \pm$	$\frac{1}{x} \rightarrow 0 \pm \Leftrightarrow x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$