Föreläsningsanteckningar och övningar till logik – mängdlära – Boolesk algebra

I kursen **matematiska metoder, del A (TMA042)** behandlar vi i lv 2 logik, mängdlära och Boolesk algebra. I satslogik och mängdalgebra, två exempel på Boolesk algebra, införs grundbegrepp som används sedan i allt kommande; Boolesk algebra tillämpas även i parallellkursen digital- och datorteknik.
Dessa föreläsningsanteckningar innehåller kortfattat det vi går igenom lv 2 samt övningar. De kompletterar kap. 0 och appendix B i *Persson*/*Böiers* (Analys i en variabel) och avsn. 3.1-3.4 i *Johnson*/*Larsson*/*Arebrink* (Grundläggande digital- och datorteknik). De skall underlätta inlärningen, men ingalunda ersätta föreläsningarna. Fler och utförliga exempel samt bevis görs på föreläsningarna.

1. Satslogik

Vi skall försöka att skapa ett entydigt (vetenskapligt) språk med hjälp av vardagssvenskan genom att införa strängt definierade termer (s.k. facktermer, grundbegrepp) och "operatorer" för att generera nya termer.

1.1 UTSAGOR

DEF: En MATEMATISK UTSAGA är en utsaga som är antingen sann eller falsk ("tertium non datur") och vars sanningshalt kan avgöras på ett objektivt sätt.

[DEFINITION är ett fastslående vad ett visst begrepp skall betyda].

EX 1: Betrakta följande uttryck:

$$\begin{cases} A:\ 1+2=3 \\ B:\ 1+2=5 \\ C:\ 2<3 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} D:\ \text{det regnar} \\ E:\ 2003 \text{ är ett stort tal} \\ F:\ \text{skål} \end{cases}.$$

F är ingen utsaga; A – E är utsagor, men D och E är inte matematiska utsagor (sanningshalten kan ej avgöras objektivt); A – C är matematiska utsagor: A och C är sanna, B är falsk; vi accepterar här redan begrepp som $1,2,3,5,+,<$ mm.

EX 2: För varje reellt tal x är $A(x): 2x=5$ en matematisk utsaga, ty för varje reellt tal x kan det avgöras om $A(x)$ är sann eller falsk (t. ex. är $A(2)$ falsk, $A(\frac{5}{2})$ sann. $A(x)$ kallas "öppen utsaga" ty den innehåller en fri variabel x, som måste deklareras ("x reellt tal").

1.2 LOGISKA OPERATORER

Med hjälp av logiska operatorer kan vi bilda nya matematiska utsagor:

symbol	läs	namn
$\wedge$	och (and)	konjunktion
$\vee$	eller (or)	disjunktion
$\neg$	icke (not)	negation
$\Rightarrow$	medför	implikation
$\Leftrightarrow$	ekvivalent	ekvivalens

dvs.: om P och Q är matematiska utsagor så skall även $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $\neg P$, $P \Rightarrow Q$ och $P \Leftrightarrow Q$ vara matematiska utsagor.
Vi definierar dessa utsagor genom att ange sanningsvärdet för alla möjliga sanningsvärden på P och Q:

Vi skriver 0 (eller f) för "falsk" resp. 1 (eller s) för "sann":

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg P$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Komplicerade utsagor kan ofta förenklas med hjälp av regler ("formler"), dvs. ersättas med ekvivalenta, enklare utsagor. Två utsagor är ekvivalenta om de har samma sanningstabell (dvs. samma sanningsvärde för alla möjliga sanningsvärden av alla ingående utsagor):

SATS: För matematiska utsagor P, Q, R gäller:

1. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

2. $(\neg(\neg P)) \Leftrightarrow P$.

3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$.

4. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

6. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

7. $\begin{cases} \text{a)} & (\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q)) \\ \text{b)} & (\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q)) \end{cases}$ (de Morgan).

8. $\begin{cases} \text{a)} & (P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \\ \text{b)} & (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \end{cases}$ (distributivitet).

2. Mängdalgebra

2.1 MÄNGDER

Den "naiva mängdläran" skapades av *Cantor*. Han definierade (1895)
"En MÄNGD M är en sammanfattning av bestämda objekt, verkliga eller tänkta, som kallas ELEMENT I M, till en enhet." Vi lägger till:
Det måste på ett objektivt sätt kunna avgöras om ett x är element i M eller inte.
Denna grundläggande "elementrelation" betecknas med $\in$:

DEF 1: Vi skriver $x \in M$ om x är element i M (x tillhör M, x ligger i M...)
resp. $x \notin M$ om x ej är element i M.

Vi betraktar här endast mängder som är definierade genom matematiska utsagor och därmed väldefinierade. För en öppen matematisk utsaga P sätter vi
$S_P = \{x : P(x) \text{ är sann}\} = \{x : P(x)\}$ = mängden av alla x sådana att $P(x)$ är sann. S_P kallas "sanningsmängden till P", { och } kallas "mängdparenteser".

EX 1: $M = \{x : x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$.
Vi skriver kort $M = \{1,2,3\}$, dvs. vi skriver helt enkelt upp mängdens elment mellan mängdparenteserna om det är möjligt.

DEF 2: Vi säger M är en ÄNDLIG mängd, om antalet element i M är ändligt, resp.
M är en OÄNDLIG mängd om antalet element i M ej är ändligt.

Viktiga mängder är (och kommer alltid att betecknas så):

DEF 3: $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ .... den TOMMA mängden
$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\cdots\}$ .... de NATURLIGA TALEN (obs: vi tar ej med 0)
$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$ ....HELTALEN
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m,n \text{ heltal}, n \neq 0\}$ ....de RATIONELLA TALEN
$\mathbb{R}$ .... de REELLA TALEN

För $a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ inför vi INTERVALL-beteckningarna
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$, $\quad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$, $\quad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$,
$[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$, $\quad]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$, $\quad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.
Dessa mängder kallas slutet intervall resp. öppet intervall resp. halvöppet intervall.

OBS: ∞ och $-\infty$ är inte element i $\mathbb{R}$ (inte reella tal)!
Det gäller $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$ och $[a,a] = \{a\}$, $]a,a[= \emptyset$, $[a,\infty]$ är odefinierat!
($a \in \mathbb{R}$).

2.2 MÄNGDOPERATORER

Vi översätter nu operatorerna $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ mellan utsagor till operatorer mellan mängder. Vi tänker oss att alla x ligger i en grundmängd U ("universum"), t.ex. $U = \mathbb{R}$.

DEF 1: För mängder A, B definieras ($A = S_P$, $B = S_Q$, P,Q matematiska utsagor)

1. $\cup$ (union): $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ($S_{P \vee Q} = S_P \cup S_Q$)

2. $\cap$ (snitt): $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ ($S_{P \wedge Q} = S_P \cap S_Q$)

3. $\subseteq$ (delmängd): $(A \subseteq B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$ ($P(x) \Rightarrow Q(x),\ x \in U$)

4. $=$ (likhet): $(A = B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ ($P(x) \Leftrightarrow Q(x),\ x \in U$)

5. ^{c} (komplement): $A^c = \{x : x \notin A\}$ ($S_{\neg P} = (S_P)^c$).

Vidare skriver vi $A \neq B$ för $\neg(A = B)$

resp. $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ (äkta delmängd) för $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$.

EX 1: **a)** $\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,2,2,1,3,3,1,2\}$ osv.
(det spelar ingen roll hur vi skriver upp en mängd).

b) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

c) $(\,]-\infty,0]\,)^c = \,]0,\infty[$ **(**$U = \mathbb{R}$).

d) $\emptyset \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{N} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{Z} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{Q} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{R}$ (sista inklusionen visas snart).

Det underlättar mycket att åskådliggöra mängder som punktmängder i planet (*Venndiagram* efter den brittiske logikern *John Venn*, 1834-1923), se föreläsningen.

Vi definierar nu ytterligare några operatorer som vi kommer att ha nytta av:

DEF 2: För två mängder A, B definierar vi

a) MÄNGDDIFFERENSEN \:
$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ (alla x som ligger i A men inte i B)

b) den SYMMETRISKA MÄNGDDIFFERENSEN Δ :
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

För mängder gäller motsvarande regler som för utsagor:

SATS: För mängder A,B,C gäller

1. $(A = B) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$.

2. $B^c = U \setminus B$, $A \setminus B = A \cap B^c$.

3. $A \Delta B = B \Delta A$.

4. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

5. $\begin{cases} \text{a)}\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ \text{b)}\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$ (de Morgan).

6. $\begin{cases} \text{a)}\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \text{b)}\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$ (distributivitet).

Regel 4 visar att den operator för utsagor som motsvarar Δ, är XOR (*exclusive or*):
$(P\ XOR\ Q) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))) \Leftrightarrow ((P \wedge (\neg Q)) \vee (Q \wedge (\neg P)))$, alltså "antingen P eller Q men ej bägge" (P och Q två matematiska utsagor).

Till sist konstruerar vi två nya, viktiga mängder:

DEF 3: Låt M, N vara två mängder.

1. Mängden $P(M) = \{A : A \subseteq M\}$ = mängden av alla delmängder till M kallas POTENSMÄNGDEN AV M.
2. Mängden $M \times N = \{(m,n) : m \in M \wedge n \in N\}$ = mängden av alla "ordnade par" (m,n) med $m \in M$ och $n \in N$ kallas
CARTESISKA MÄNGDPRODUKTEN AV M och N.

EX 2: **a)** Alltid gäller $\emptyset \in P(M)$ och $M \in P(M)$ (M en mängd).
b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ är "planet", betecknas $\mathbb{R}^2$.

Då kan vi definiera "relation" och, som speciell relation, "funktion":

DEF 4: Låt M, N vara två mängder.

1. En delmängd $R \subseteq M \times N$ kallas RELATION FRÅN M TILL N,
en relation $R \subseteq M \times M$ kallas (BINÄR) RELATION I M,
$D_R = \{x \in M : \text{det finns } y \in N \text{ så att } (x,y) \in R\}$ kallas DEFINITIONSMÄNGD,
$V_R = \{y \in N : \text{det finns } x \in M \text{ så att } (x,y) \in R\}$ kallas VÄRDEMÄNGD (till R);
vi skriver även xRy för $(x,y) \in R$ ("y står i relation R till x").
2. En relation $f \subseteq M \times N$ kallas FUNKTION FRÅN M TILL N om f är "höger-entydig", dvs. om för $x \in M$, $y_1 \in N$, $y_2 \in N$ gäller
$((xfy_1) \wedge (xfy_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2)$. I så fall finns det till varje x i f:s definitionsmängd precis ett y i f:s värdemängd som står i relation f till x, dvs. vi kan se f som en tillordning $f : x \mapsto y$ som ordnar till varje $x \in D_f$ ett entydigt bestämt $y \in V_f$; för att framhäva detta skriver vi $y = f(x)$ ("y är en funktion av x") i stället för xfy och (vi använder något missbrukligt samma symbol f):

$$\boxed{\begin{array}{l} f : M \to N \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}}$$

läs: "f är en funktion från M till N som ordnar till ett element $x \in D_f$ elementet $y = f(x) \in V_f$ ".

Observera att vi använder pilen $\to$ för avbildningen ("f går från M till N ") och pilen $\mapsto$ för den elementvisa tillordningen ("f ordnar till x bildpunkten $f(x)$ ").
Själva relationen kallas då GRAFEN TILL f och betecknas G_f :
$G_f = \{(x,y) \in M \times N : x \in D_f \wedge y = f(x)\}$. En avbildning $f : M \to M$ med $D_f = M$ kallas även UNITÄR OPERATOR PÅ M och en avbildning $f : M \times M \to M$ med $D_f = M \times M$ kallas BINÄR OPERATOR PÅ M.

EX3: **a)** Ordningsrelationen $<$ på $I\!R$ är halvplanet
$< \; = \{(x,y) \in I\!R^2 : y - x \text{ är positivt}\} \subseteq I\!R \times I\!R$ (rita!).

b) Funktionen "kvadrera" skriver vi upp så här:
$f : \begin{array}{l} I\!R \to I\!R \\ x \mapsto x^2 \end{array}$; här är $D_f = I\!R$, $V_f = [0,\infty[$, $G_f = \{(x,x^2) : x \in I\!R\}$ (rita!).

c) Additionen $+$ är avbildningen $+ : \begin{array}{l} I\!R \times I\!R \to I\!R \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array}$ (en binär operator på $I\!R$).

Binära relationer spelar en viktig roll i t.ex. switchnätteorin; vi nämner en speciell relation som gör det möjligt att dela upp en mängd i "klasser" av element som anses vara likvärdiga i någon mening:

DEF5: En relation $\sim \; \subseteq M \times M$ på M kallas

a) REFLEXIV om $x \sim x$ för alla $x \in M$.

b) SYMMETRISK om $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ för alla $x \in M,\; y \in M$.

c) TRANSITIV om $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$ för alla $x \in M, y \in M, z \in M$.

d) EKVIVALENSRELATION PÅ M om $\sim$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

EX4: **a)** $\Leftrightarrow$ är en ekvivalensrelation på mängden av alla matematiska utsagor.

b) $=$ är en ekvivalensrelation på $P(M)$ (M en mängd).

c) "Modulo-räkning" ger en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$: Låt $p \in I\!N$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; man säger "m är kongruent n modulo p", bet. $m \equiv n (\operatorname{mod} p)$, om $m - n = kp$ för något $k \in \mathbb{Z}$. "kongruent modulo p" är en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$, tal som ger samma rest vid division med p är ekvivalenta. Ett exempel är klockan: vi räknar modulo 12.

Satslogik och mängdlära är två viktiga, självständiga matematiska discipliner. Men de "funkar" på samma sätt som (är specialfall av, exempel på, modeller för) en mera generell matematisk struktur (= mängd av vissa objekt med operationer som lyder vissa regler), nämligen en "Boolesk algebra". Vi skriver operationerna då "algebraiskt". Målet är att du lär dig att <u>räkna</u> med dessa. I kursen digital- och datorteknik studerar du fysikaliska modeller (realiseringar) av Booleska algebror.

George Boole (1815-11-02 – 1864-12-08): The Mathematical Analysis of Logic (1847)
An Investigation of the Laws of Thought (1854)

3. BOOLESK ALGEBRA

DEF 1: $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ kallas BOOLESK ALGEBRA om

- M är en icke tom mängd
- $'$ är en unitär operator på M, $+$ och $\cdot$ är binära operatorer på M
- 0 och 1 är två element i M

så att följande axiom gäller: för $x,y,z \in M$ gäller

A1: $\begin{cases} x+y=y+x \\ x\cdot y=y\cdot x \end{cases}$ (kommutativitet)

A2: $\begin{cases} x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z) \\ x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z) \end{cases}$ (distributivitet)

A3: $\begin{cases} x+0=x \\ x\cdot 1=x \end{cases}$ (0 resp. 1 är neutralt element för $+$ resp. $\cdot$)

A4: $\begin{cases} x+x'=1 \\ x\cdot x'=0 \end{cases}$ (komplementregeln)

Ta gärna med följande regel

A0: $\begin{cases} x+(y+z)=(x+y)+z \\ x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z \end{cases}$ (associativitet, kan härledas ur A1…A4)

Observera "dualitetsprincipen": byter man i en giltig sats överallt

$\begin{Bmatrix} + \text{ mot } \cdot \\ \cdot \text{ mot } + \\ 0 \text{ mot } 1 \\ 1 \text{ mot } 0 \end{Bmatrix}$ så fås igen en giltig sats (klart, axiomen är ju ”duala”).

EX: (Satslogik – mängder)

a) $\langle M,\vee,\wedge,\neg,f,s\rangle$ där M är mängden av alla matematiska utsagor, ekvivalenta utsagor identifierade, med t.ex. $f: 1=2$ och $s: 2=1+1$.

b) $\langle P(M),\cup,\cap,{}^c,\emptyset,M\rangle$ där M är en mängd ($A^c = M \setminus A$).

En viktig binär operator är *XOR*-operatorn (eller *ring summan*) $\oplus$:

DEF 2: I en Boolesk algebra $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ definieras för $x,y \in M$:

$x \oplus y = x\cdot y' + x'\cdot y$.

För utsagor (ex. a)) är $P \oplus Q = P \text{ XOR } Q$ (se sid. 5),
för mängder (ex. b)) är $A \oplus B = A \Delta B$ (se sid. 4).
Regler för $\oplus$: se sats2.

ANMÄRKNING

Att $'$ är en unitär operator på M innebär att $'$ är en avbildning från M till M som ordnar till ett element $x \in M$ ett entydigt bestämt element $x' \in M$ $\left(\begin{array}{c} ':M \to M \\ x \mapsto x' \end{array} \right)$.

Att $+$, resp. $\cdot$, resp. $\oplus$ är en binär operator på M innebär att $+$, resp. $\cdot$, resp. $\oplus$ är en avbildning från $M \times M$ till M som ordnar till ett element $(x, y) \in M \times M$ (alltså till två element x, y ur M) ett entydigt bestämt element $x + y \in M$ resp. $x \cdot y \in M$ resp. $x \oplus y \in M$ $\left(\begin{array}{c} +: M \times M \to M \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array}, \begin{array}{c} \cdot : M \times M \to M \\ (x,y) \mapsto x \cdot y \end{array}, \begin{array}{c} \oplus : M \times M \to M \\ (x,y) \mapsto x \oplus y \end{array} \right)$.

SATS 1 (REGLER, visas på föreläsningen)

I en Boolesk algebra $\langle M ,+ ,\cdot ,' ,0 ,1 \rangle$ gäller för $x, y, z \in M$:

1. $\begin{cases} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{cases}$ (idempotenslagarna)

2. $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x \cdot 0 = 0 \end{cases}$ (dominanslagarna)

3. $\begin{cases} x + x \cdot y = x \\ x \cdot (x + y) = x \end{cases}$ (absorptionslagarna)

4. $(x + z = 1 \text{ och } x \cdot z = 0) \Rightarrow z = x'$

5. $(x')' = x,$ $\begin{cases} 0' = 1 \\ 1' = 0 \end{cases}$ ($'$ är idempotent)

6. $\begin{cases} (x + y)' = x'y' \\ (x \cdot y)' = x' + y' \end{cases}$ (de Morgan).

VARNING: <u>Ingen</u> av följande 4 implikationer gäller:

$\begin{cases} x + y = x + z \Rightarrow y = z \\ x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z \end{cases}$ resp. $\begin{cases} x + y = x \Rightarrow y = 0 \\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1 \end{cases}$.

Enkla motexempel fås i en mängdalgebra:
För $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{2,3\}, D = \{1\},$ $(A,B,C,D \in P(\mathbb{N}))$ gäller
$A \cup B = A \cup C = \{1,2,3\}$ men $B \neq C$, $A \cap B = A \cap D = \{1\}$ men $B \neq D$,
$A \cup D = A$ men $D \neq \emptyset$ och $D \cap A = D$ men $A \neq \mathbb{N}$.
OBS: det räcker att vederlägga två implikationer, vilka och varför?

SATS 2 (REGLER för $\oplus$)

I en Boolesk algebra $\langle M ,+ ,\cdot ,' ,0 ,1 \rangle$ gäller för $x, y, z \in M$:

1. $x \oplus y = y \oplus x$ (kommutativitet).

2. $x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$ (distributivitet).

3. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (associativitet).

4. $x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$ (strykningslagen, bevis sid. 10).

5. $x \oplus x = 0,\ x \oplus x' = 1,\ x \oplus 0 = x,\ x \oplus 1 = x'$.

6. $x \oplus y = (x+y) \cdot (x \cdot y)'$.

7. $(x \oplus y) + (x \cdot y) = x + y$.

8. $(x \oplus y)' = x' \oplus y = x \oplus y' = x' \cdot y' + x \cdot y$ (= det till $x \oplus y$ duala uttrycket).

9. $(x \oplus y) \cdot (y \oplus z) = x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z$.

10. $(x \oplus y) + (y \oplus z) = x \cdot y' + y \cdot z' + z \cdot x'$.

ÖVNINGAR

1. a) Visa $(\neg((x<y) \vee (y<x))) \Leftrightarrow (x=y)$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$.

b) Bestäm sanningsmängderna S_P, S_Q och S_R till

$P(x):\ (x^2 > x) \vee (\neg(x>1))$, $R(x):\ (x^2 > x) \wedge (\neg(x>1))$ och

$Q(x):\ (\neg(x=2)) \vee (3x - x^2 = 2)$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. a) Bestäm $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$ och $A \Delta B$ för $A = \{1,2,3,4\},\ B = \{3,4,5\}$.

b) Bestäm $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$ och $A \Delta B$ för $A = [-8,9],\ B =]-5,\infty[$.

c) Bestäm $P(M)$ för $M = \{1,2,3\}$.

d) Bestäm $A \times B$ och $B \times A$ för $A = \{1,2\},\ B = \{2,3,4\}$.

e) Bestäm $A \times B$ och $B \times A$ för $A = [0,1],\ B = [-1,\infty[$ (rita!).

f) Förenkla följande uttryck för mängder A, B:

f1) $A \setminus (B \setminus A)$, **f2)** $A \setminus (A \setminus B)$, **f3)** $A \cup (A \setminus B)$, **f4)** $A \cap (A \setminus B)$,

f5) $A \cup (B \setminus A)$, **f6)** $A \cap (B \setminus A)$, **f7)** $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, **f8)** $(A^c \cap B^c)^c$.

3. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$. Visa

a) $x + y = x \Leftrightarrow x \cdot y = y$.

b) $x \cdot y + x' \cdot y' = 1 \Leftrightarrow x = y$.

c) $x + x' \cdot y = x + y$.

d) $x + y = x \oplus y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$

e) Visa att för alla $N \in \mathbb{N}$ gäller $\left(\prod_{k=1}^{N} x_k \right)' = \sum_{k=1}^{N} x_k'$ och $\left(\sum_{k=1}^{N} x_k \right)' = \prod_{k=1}^{N} x_k'$

$(x_1, x_2, \cdots, x_N \in M;\ \prod_{k=1}^{N} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N$ = produkten av $x_1, x_2, \cdots, x_N$).

4. Formulera och bevisa sats 1.2 (6) (sid. 2) algebraiskt.

5. Lös uppgift 2f genom att räkna algebraiskt.

6. Uttryck $x \oplus y$ m.h.a. enbart $\cdot$ och $'$ (AND-grind och NOT-grind).

7. Formulera reglerna i uppg. 3 och uppg. 5 för utsagor och för mängder.

SVAR

1b) $S_P = S_Q = \mathbb{R}$, $S_R =]-\infty,0[$

2a) $\{1,2,3,4,5\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2\}$, $\{5\}$, $\{1,2,5\}$

b) $[-8,\infty[$, $]-5,9]$, $[-8,-5]$, $]9,\infty[$, $[-8,-5]\cup]9,\infty[$

c) $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

d) $A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}\neq B\times A=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

e) $A\times B=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y\ge -1\}\neq B\times A=\{(x,y): x\ge -1,\ 0\le y\le 1\}$

f) **f1)** A, **f2)** $A\cap B$, **f3)** A, **f4)** $A\setminus B$, **f5)** $A\cup B$, **f6)** $\emptyset$, **f7)** $A\cup B$, **f8)** $A\cup B$

6. $(x'\cdot y')'\cdot(x\cdot y)'$ eller $\left((x'\cdot y)'\cdot(x\cdot y')'\right)'$ **7.** t.ex. **3m**: $\left(\bigcap_{k=1}^{N} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{N} A_k^c$

Lösning av uppgift 3d:

Det är ett "om och endast om"-påstående (en ekvivalens av två utsagor), vi visar de två implikationerna var för sig (se (1) i sats sid. 2):

"$\Leftarrow$": Om $x\cdot y=0$ gäller, så gäller $x+y=x\oplus y$:

bev: $\underline{x+y}=x\cdot(y+y')+y\cdot(x+x')=x\cdot y+x\cdot y'+y\cdot x+y\cdot x'=\underline{x\cdot y'+y\cdot x'}$

(ty $x\cdot y=0$). Vi utnyttjade $x+x'=1$, $x\cdot 1=x$, $0+x=x$. vsv

[alternativt: sats 2 (7) sid. 8!]

"$\Rightarrow$": Om $x+y=x\oplus y$ gäller, så gäller $x\cdot y=0$:

bev: $x+y=x\oplus y\Rightarrow x\cdot y\cdot(x+y)=x\cdot y\cdot(x'\cdot y+x\cdot y')\Rightarrow x\cdot y+x\cdot y=0+0$

$\Rightarrow \underline{x\cdot y=0}$. Vi utnyttjade $x\cdot x=x, x\cdot x'=0$, $x\cdot y+x\cdot y=x\cdot y$. vsv

Ett annat (njaa, mycket liknande) bevis av "$\Rightarrow$" får du med identiteten

$x\oplus y=(x+y)\cdot(x\cdot y)'$ (sats 2 (6) sid. 9):

$\underline{x\cdot y}=x\cdot x\cdot y+x\cdot y\cdot y=(x+y)\cdot(x\cdot y)=(x\oplus y)\cdot(x\cdot y)=(x+y)\cdot(x\cdot y)'\cdot(x\cdot y)\underline{=0}$.

bevis av "strykningslagen" $x\oplus y=x\oplus z\Leftrightarrow y=z$:

"$\Leftarrow$": trivialt

"$\Rightarrow$": $x\oplus y=x\oplus z\Leftrightarrow x\cdot y'+x'\cdot y=x\cdot z'+x'\cdot z$, multiplikation med x resp. x' ger $(*)$ $x\cdot y'=x\cdot z'$ resp. $x'\cdot y=x'\cdot z$.

Därmed kan vi nu visa att $z+y'=1$ och $z\cdot y'=0$, sats 1 (4) ger då att $y'=z'$ och därmed $y=z$ p.g.a. sats 1 (5):

$\underline{z+y'}=[\text{multiplicera med } 1=x+x']=z\cdot x+z\cdot x'+y'\cdot x+y'\cdot x'=(*)=$

$=z\cdot x+x'\cdot y+x\cdot z'+y'\cdot x'=x+x'\underline{=1}$.

$\underline{z\cdot y'}=[\text{multiplicera med } x+x']=z\cdot x\cdot y'+z\cdot x'\cdot y'=(*)=z\cdot x\cdot z'+x'\cdot y\cdot y'\underline{=0}$.

(eller multiplicera $(*)$ med z resp. med y' så får du

$x\cdot y'\cdot z=0$ resp. $x'\cdot z\cdot y'=0$, addition ger $(x+x')\cdot y'\cdot z=0$, alltså $\underline{y'\cdot z=0}$). vsv