<u>Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2004-08-16, kl. 14.15-18.15</u>
<u>Hjälpmedel:</u> Inga, ej heller räknedosa
<u>Telefon:</u> Jonas Hartwig, tel. 073 - 9779268
<u>OBS:</u> Fyll i <u>allt</u> på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på <u>varje</u> inlämnat blad.

==

1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:
$x' \cdot y' + x \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = y$. (4p)

2. Visa med induktion att en mängd med n element har 2^n delmängder ($n \in \mathbb{N}$). (4p)

3. Beräkna $4\arctan\left(\sqrt{5}\right) - \arctan\left(4\sqrt{5}\right)$. (4p)

4. Vilka värden antar $f(x) = e^{2x} - 3e^x - 2x$ för $x \in \mathbb{R}$? (6p)

5. Låt $f(x) = 14 + \cos x - x\arctan x$.
a) Visa att f är injektiv på $[0, \infty[$. (4p)
b) Visa att $f(x) > 0$ då $|x| \leq 8$ och beräkna arean av området $D = \{(x, y) : -8 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (6p)

6. Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \dfrac{1}{|x| - \ln\left(x^2\right)}$ för $0 \neq x \in \mathbb{R}$.
a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? (3p)
b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (5p)
c) Visa att f har en inflexionspunkt i $x = 1$. (4p)

7. **a)** Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Visa att om f och g har ett gränsvärde då x går mot a så har även $f + g$ ett gränsvärde då x går mot a. (5p)
b) Definiera binomialkoefficienterna $\binom{n}{m}$. (2p)
c) Definiera funktionerna $\arctan x$ och visa att $D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. (3p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2004-01-13, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Erik Svensson, tel. 0740 - 459022
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.
===

1. Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Bevisa eller motbevisa följande påståenden: För alla $x,y\in M$ gäller

a) $x + x'\cdot y = y + y'\cdot x$ (2p)
b) $x\cdot y' + x'\cdot y = x + y$. (2p)
c) $x\cdot y + x'\cdot y' = 1$ (2p)

2. Beräkna $\arccos\frac{13}{14} - \arccos\frac{1}{7}$. (4p)

3. Låt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - x\sqrt{x}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Bestäm definitionsmängden till f. (2p)
b) Visa att f är injektiv och bestäm värdemängden till f. Motivera väl!
[ledning: Visa att $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\sqrt{x}} - \sqrt{x}}$]. (5p)
c) Bestäm en primitiv funktion till f. (3p)

4. Vilka värden antar funktionen $f(x) = \ln\sqrt{(2-\cos x)^3} + \ln\sqrt{2+\cos x}$ på $[0, 2\pi]$? Motivera väl! Rita även kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter. (6p)

5. Låt $f(x) = \begin{cases} 2+x, & \text{då } x \le 0 \\ 4 - x - 2e^{-x}, & \text{då } x > 0 \end{cases}$.

a) Visa att f är deriverbar i 0. Är f' kontinuerlig i 0? (4p)
b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (5p)
c) Beräkna arean av $\{(x,y) : -1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le f(x)\}$. (4p)

6. a) Visa att om $f'(x) \le 0$ för $x \in \,]a,b[$ så är f avtagande i $]a,b[$. (4p)
b) Definiera binomialkoefficienterna $\binom{m}{n}$. (2p)
c) Definiera funktionerna $\ln x$ och $\exp(x)$ och härled derivatan för $\exp(x)$. (5p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2003-08-18, kl. 14.15–18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Alex Herbertsson, tel. 0740 - 459022
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.
===

1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ vara en Boolesk algebra med $0 \neq 1$.
Betrakta påståendet P: för $x, y \in M$ gäller $x = x + y \cdot x'$.
a) Visa att P är falskt. (2p)
b) Finn felet i följande "bevis" av P:
Multiplikation av vänsterled och högerled med x ger:
$$\begin{cases} VL \cdot x = x \cdot x = x \\ HL \cdot x = x \cdot x + y \cdot x' \cdot x = x + 0 = x \end{cases} \Rightarrow \underline{VL = HL} \quad \text{vsv.}$$ (2p)

2. Visa med induktion att för alla naturliga tal $n \geq 4$ gäller $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{n}$. (6p)

3. Låt $f(x) = \arctan \frac{2x+1}{2\sqrt{1-x-x^2}}$.
a) Bestäm D_f och V_f. (5p)
b) Visa att $f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t-t^2}}\,dt$ för $x \in D_f$. (4p)
c) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}(\frac{\pi}{4})$. (4p)
d) Rita $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)

4. Visa att $\ln\sqrt{\cosh(2x)} > \tanh^2(x)$ för alla $0 \neq x \in I\!R$ $\left(\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$. (5p)

5. Beräkna arean av det område i planet som begränsas av
x-axeln, y-axeln, linjen $x = -2$ och kurvan $y = \frac{14-2x}{x^3-7x+6}$. (6p)

6. Funktionen f ges av $f(0) = 0$ och $f(x) = \sqrt[3]{x}\ln(|\sin x|)$ för $0 \neq x \in D_f = (-\pi, \pi)$.
Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? (4p)

7. a) Låt $f : I\!R \to I\!R$ vara en funktion och $a \in D_f$.
Är följande påstående P_1 resp. P_2 sant eller falskt (bevisa dina svar!):
P_1: Om f är kontinuerlig i a så är f deriverbar i a.
P_2: Om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a. (4p)
b) Definiera funktionen $\arcsin x$. (2p)
c) Definiera $f(x) \to \infty$ då $x \to a$. (2p)

BB

Matematik CTH&GU

<u>Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2003-01-14, kl 8.45-12.45</u>
<u>Hjälpmedel:</u> Inga, ej heller räknedosa
<u>Telefon:</u> Alex Herbertsson, tel. 0740 - 459022
<u>OBS:</u> Fyll i <u>allt</u> på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på <u>varje</u> inlämnat blad.
==

1. Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x,y\in M$ gäller

$$x'\cdot y' = (x\cdot y)'\cdot(x\oplus y)'.$$ (4p)

2. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^{n}(2k-3)3^{k-1} = 2+(n-2)3^{n}$ för $n\in\mathbb{N}$. (5p)

3. Beräkna $\arctan 2+\arctan 3$. (4p)

4. Låt $f(x)=2\arctan(x)-\arctan(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. (5p)

b) Bestäm värdemängden till f. (3p)

5. Beräkna arean av området $\left\{(x,y): -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{10\cos x}{7-3\cos^2 x-\sin^4 x}\right\}$. (5p)

6. Låt $f(x)=\dfrac{e^x\cosh(x)}{\cosh(2x)}$.

a) Beräkna en primitiv funktion till f. (4p)

b) Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (5p)

7. Visa att $\ln(1+x^4)>2\arctan(x^2)-1$ för alla $x\in\mathbb{R}$. [Du får utnyttja att $\pi<3.15$] (5p)

8. **a)** Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (4p)

b) Definiera binomialkoefficienterna $\binom{m}{n}$. (2p)

c) Visa att funktionen $x\mapsto\sin(x)$ är deriverbar
[du får utnyttja att $\cos(x)$ är kontinuerlig och $\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$]. (4p)

BB

Matematik CTH&GU

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2002-01-15, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Erik Broman, tel. 0740 - 459022
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad.

==

1. Låt $A=[-1,2]$ resp. $B=(0,1)$ (slutet, resp. öppet intervall i $\mathbb{R}$). Ange den kartesiska mängdprodukten $A\times B$. (2p)

2. Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x,y\in M$ gäller: $(x\cdot y)\oplus(x\oplus y)=x+y$. (4p)

3. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^{n}3k(k+1)=n(n+1)(n+2)$ för alla $n\in\mathbb{N}$. (4p)

4. Beräkna det exakta värdet av $\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{3}{4}$. (4p)

5. Låt $f(x)=x^2+\ln(1+x^2)-2x\arctan x$, $D_f=[0,\infty)$, $g(x)=\dfrac{2\sin(\pi x)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}x\right)-4}$.

a) Visa att f är injektiv och bestäm $Df^{-1}\left(1+\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)$. (6p)

b) Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna $y=f(x)$, $y=g(x)$ och $x=1$ (4p var för $\int f(x)dx$ resp. $\int g(x)dx$). (9p)

6. Rita kurvan $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{4+x^4}}$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)

7. Låt $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$. Visa att f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ (3p)

och ange en ekvation för tangenten till kurvan $y=f(x)$ i punkten $(\pi,0)$ (3p). (6p)

8. **a)** Visa att om funktionerna f och g är deriverbara i a så är även $f+g$ deriverbar i a och $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$. (3p)

b) Visa att en funktion som är deriverbar i en punkt a är även kontinuerlig i a. (3p)

c) Definiera funktionerna $\ln x$ och $\exp(x)$ (motivera väl). (3p)

BB

Svar till tentorna i matematiska metoder, tma042, del A (E1), ht 04

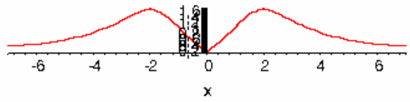
04-08-16

3) π **4)** $V_f = [-2-2\ln 2, \infty[$ **5b)** $m(D) = 232 + 2\sin 8 - 65\arctan 8$

6a) f är kontinuerlig (på hela $\mathbb{R}$) men ej deriverbar (i 0)

b) $(0,0)$ är minpunkt, $(\mp 2, \frac{1}{2-2\ln 2})$ är maxpunkter,

x–axeln är asymptot

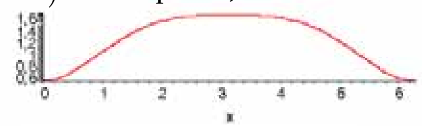


04-01-13

1a) sant, **b)** och **c)** falska **2)** $-\frac{\pi}{3}$ **3a)** $D_f =]0,1[$ **b)** $V_f =]\frac{1}{2}, \infty[$ **c)** $-2\sqrt{x} - 4\sqrt{1-\sqrt{x}}$

4) $(0, \ln\sqrt{3})$ och $(2\pi, \ln\sqrt{3})$ är minpunkter, $(\pi, 3\ln\sqrt{3})$ är maxpunkt,

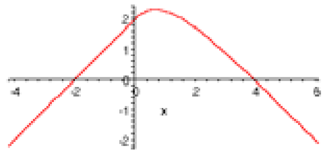
$V_f = [\ln\sqrt{3}, 3\ln\sqrt{3}]$



5a) ja **b)** $(\ln 2, 3-\ln 2)$ är maxpunkt,

f är konvex och konkav i $]-\infty, 0]$ (en linje !),

f är konkav i $[0, \infty[$ **c)** $7 + \frac{2}{e^3}$



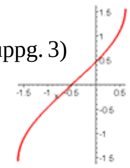
03-08-18

3a) $D_f =]-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$, $V_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, **c)** $Df^{-1}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{10}}{4}$

d) f är konkav i $]-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{1}{2}]$, konvex i $[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$

5) $4\ln 3 - 2\ln 2$ **6)** f är kontinuerlig, men ej deriverbar (i 0)

$y = f(x)$ (uppg. 3)

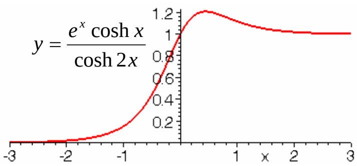


03-01-14

3) $\frac{3\pi}{4}$ **4a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ **5)** $\pi + \ln 3$

6a) $\frac{1}{4}\ln(e^{4x}+1) + \frac{1}{2}\arctan e^{2x} + c$

b) maxpunkt $(\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}))$, asympt. $y = 0, y = 1$

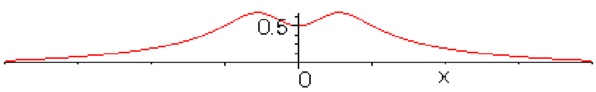


02-01-15

1) $\{(x,y) : -1 \le x \le 2, 0 < y < 1\}$ **4)** $\frac{\pi}{4}$ **5a)** $\frac{2}{4-\pi}$ **b)** $\frac{\ln 3}{\pi} + \ln 2 - \frac{2}{3}$ **7)** $x + \pi y = \pi$

6) asymptot: $y = 0$, lok. min: $(0, \frac{1}{2})$

lok. max: $\left(\pm\sqrt{\sqrt{5}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)$



Lycka till!

Bernhard