Lösningar till uppgifterna (tma042, delA, 04)

uppgift a

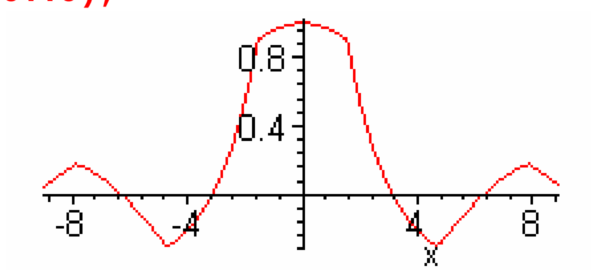
> $\text{solve}(|x^2 - 1| < |2x - 3|, \{x\})$

$$\{-1 - \sqrt{5} < x, x < -1 + \sqrt{5}\}$$

uppgift b

> $f := x \to \dfrac{\sqrt{1 + \sin(x)} - \sqrt{1 - \sin(x)}}{x}$

```
> plot(f(x),x=-9..9);
```




```
> limit(f(x),x=0); limit(f(x),x=infinity);
```

$$1$$

$$0$$

Eftersom $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ så är alltså f kontinuerlig i 0. Det andra gränsvärdet visar att x-axeln är asymptot då x går mot oändligheten.

Är f deriverbar i $\dfrac{\pi}{2}$? Kolla om differenskvoten har ett gränsvårde då x går mot $\dfrac{\pi}{2}$:

```
> limit((f(Pi/2+h)-f(Pi/2))/h,h=0,'left'); limit((f(Pi/2+h)-
f(Pi/2))/h,h=0,'right');
```

$$\frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\pi}{\pi^2}$$

$$\frac{-4\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\pi}{\pi^2}$$

uppgift c

> $\int \frac{a\,x+b}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$; $\int_1^t \frac{1+2\ln(x)}{x^2}\,dx$; $2\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,dx$

$$a\sqrt{3+x^2}+b\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{3}\right)$$

$$\frac{-3-2\ln(t)+3\,t}{t}$$

$$2\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}\,dx$$

I den sista integralen utnyttjar vi att f är jämn; *maple* hittar ingen primitiv funktion (ej elementär!), så vi beräknar ett numeriskt närmevärde:

```
> evalf(%);
```

$$4.182512844$$

uppgift d

Först bestämmer vi definitionsmängderna (det som står under rottecknet får ej vara negativt):

> $f1 := x \to \frac{1}{2}+x-x^2+\frac{\sqrt{1+4\,x}}{2}$; $g1 := x \to \frac{1}{2}+x-x^2-\frac{\sqrt{1+4\,x}}{2}$

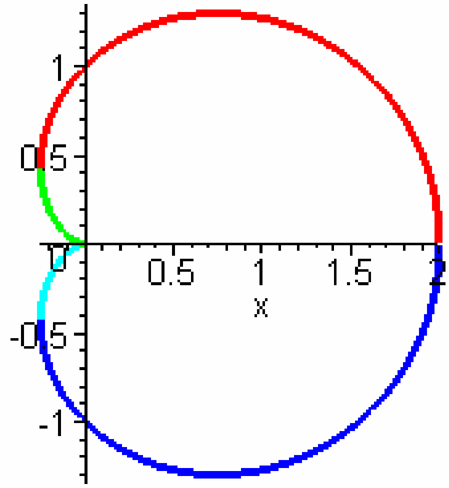
```
> Df:=solve(f1(x)>=0,{x});Dg:=solve(g1(x)>=0,{x});
```

$$Df := \{\frac{-1}{4} \le x,\, x \le 2\}$$

$$Dg := \{\frac{-1}{4} \le x,\, x \le 0\}$$

Sedan skriver vi plot-kommandon för vartdera intervall (vi tar olika färger) och ritar:

```
> p1:=plot(sqrt(f1(x)),x=-
1/4..2,scaling=constrained,color=red):
> p2:=plot(-sqrt(f1(x)),x=-
1/4..2,scaling=constrained,color=blue):
> p3:=plot(sqrt(g1(x)),x=-
1/4..0,scaling=constrained,color=green):
> p4:=plot(-sqrt(g1(x)),x=-
1/4..0,scaling=constrained,color=cyan):
> plots[display]([p1,p2,p3,p4],thickness=3);
```



Nu ser man tydligt vilka delar av kurvan som ges av vilka funktioner (i färg på skärmen!).

Tillägg:

Vi beräkna arean (pga symmetyri två gånger arean av övre halvan):

```
> arean:=2*(int(sqrt(f1(x))-sqrt(g1(x)),x=-1/4..0)+int(sqrt(f1(x)),x=0..2));
```

$$arean := 2\int_{-1/4}^{0} \frac{\sqrt{2+4\,x-4\,x^2+2\,\sqrt{1+4\,x}}}{2} - \frac{\sqrt{2+4\,x-4\,x^2-2\,\sqrt{1+4\,x}}}{2}\,dx + 2\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{2+4\,x-4\,x^2+2\,\sqrt{1+4\,x}}}{2}\,dx$$

Ett numeriskt närmevärde fås med med *evalf* och jämförs med det korrekta värdet $\frac{3\,\pi}{2}$ (som vi beräknar i matte delC):

```
> evalf(arean);evalf(3*Pi/2);
```

$$4.712388980$$

$$4.712388981$$