# Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del A (TMA042), ht 1998

1. Laborationerna är ej obligatoriska.
2. Laborationerna består av fyra uppgifter. Varje uppgift som du får minst 10p för, ger 1 bonuspoäng vid tentamina i matematiska metoder för E1, del A, 23/10-98, 13/1-99 och 20/8-99.
3. Lösningarna skall lämnas senast on, 15/10, kl $15^{00}$ (efter föreläsningen) till mig. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad (se anvisningar), blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Lösningarna lämnas tillbaka med del A - tentan.

## Uppgift 1 (analytisk geometri)

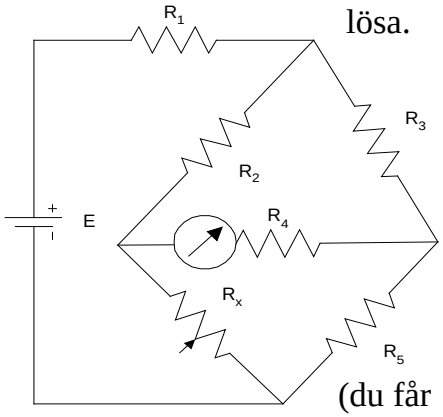
**a)** Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Beräkna $AB$, $BA$, $\det A$ och $A^{-1}$.
Lös matrisekvationen $AX = B$ och ekvationssystemet $AX = 18D$. (4p)

**b)** Låt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beräkna $\vec{a} \bullet \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ och $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$. (4p)

**c)** I figuren visas en resistensbrygga, som är kopplad till en spänningskälla med spänningen $E = 100V$. I bryggan finns ett mätinstrument inkopplat. Vi vill bestämma strömmen genom detta som funktion av den variabla resistansen $R_x$ i intervallet $10 \le R_x \le 40$.




För varje $R_x$-värde får vi ett linjärt ekvationssystem att lösa. Detta sätts upp genom slinganalys m.h.a. Ohms lag (spänningsfallet $V$ över en resistans $R$ p.gr.a. strömmen $I$ ges av $V = RI$) och Kirchhoffs lag (spänningsfallet runt en slinga är noll). Det blir bara fyra element i 3/3 matrisen som beror på $R_x$. Bestäm strömmen genom instrumentet som funktion av $R_x$. Rita sedan denna funktion för $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 5\Omega$ och $R_5 = 10\Omega$. Kolla, att du satt upp rätt ekvationssystem, genom att ta med en extra slinga (du får då ett överbestämt ekvationssystem). Vad händer då $R_x$ väljs större och större? (4p)

## Uppgift 2 (funktioner, gränsvärde, derivata)

**a)** "Lita aldrig på figurer!" (inlämningsuppgift 5): (3p)

Låt $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}\,\ln x+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x>0$ och $f(0)=0$.

**a1)** Rita kurvan $y=f(x)$ för $0<x<40$, för $0<x<16$ och för $0<x<1$.
Då tror du väl att $f$ är injektiv ? Nix! Rita kurvan även för $0<$ $<0.0001$ !

**a2)** Beräkna $f(1)$, $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $f'(x)$, $f'(1)$ och $\lim_{x\to 0+} f'(x)$.

**b)** "Lita inte alltid på maple!": (5p)

Låt $f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $x\neq 0$ och $f(0)=1$.

**b1)** Rita kurvan för $-9<x<9$ (snyggt, va ?).

Då förmodar du att $f$ är jämn, kontinuerlig, konkav i $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ och inte deriverbar i $\frac{\pi}{2}$ :

**b2)** Visa <u>utan</u> datan att $f$ är jämn, kontinuerlig och har $x$-axeln som asymptot.

**b3)** Visa <u>med</u> datan att $f$ är jämn, kontinuerlig i 0 och har $x$-axeln som asymptot.

**b4)** Avgör med datan om $f$ är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

**b5)** Rita kurvan $y=f'(x)$ $(-9<x<9)$ och motivera att $f$ antar sitt största värde i 0.

**b6)** Rita kurvan $y=f''(x)$, $(-\pi<x<\pi)$ och bestäm var $f$ är konvex/konkav i $[-\pi,\pi]$.

**c)** "Låt maple hjälpa dig …": (5p)

Låt $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$ och $g(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$.

**c1)** Bestäm $D_f$ och $D_g$.

**c2)** Rita kurvorna $y=\pm f(x),\ x\in D_f$ och $y=\pm g(x),\ x\in D_g$ i samma diagram.

**c3)** Kurvorna i c2) ger en ”sluten” kurva $C$. I vilka punkter har $C$ en lodrät, resp en vågrät tangent? Har $C$ en tangent i origo?

## Uppgift 3 (integral)

**a)** Beräkna $\int\frac{ax+b}{\sqrt{3+x^2}}dx$, $\int_1^t\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x^2}{x^2}\right)dx$ och $\int_1^\infty\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x^2}{x^2}\right)dx$. (2p)

**b)** Låt $f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+x-1}{x^6-x^5-3x^4+x^3+2x+4}$.

**b1)** Partialbråksuppdela $f(x)$.

**b2)** Beräkna mha *maple* en primitiv funktion $F$ till $f$ och rita grafen $y=F(x)$ för $-6<x<8$. Vilken primitiv funktion fick du? (1p+3p)

**c)** Beräkna arean av det område som omslutes av kurvan $C$ i uppgift 2c). (3p)

**d)** Låt $f(x)=3x(x-2)\left(1-e^{-x}x^2\cos\left(3\sqrt{x}\right)\sin(x)\right)\ln\left(2-\frac{x}{\pi}\right)$.

**d1)** Rita grafen till för $0 \le x \le \pi$ och tre Riemannsummor $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ till i ett diagramm: Välj $n$ lika långa delintervall, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, och $\xi_k = x_{k-1}$ (vänstra randpunkten), resp $\xi_k = x_k$ (högra randpunkten), resp $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ (mittpunkten) $(k = 1 \cdots n)$.

**d2)** Beräkna Riemannsummorna i d1) för $n = 37$, för $n = 237$ och ”mittsumman” även för $n = 2222$; jämför sedan dessa värden med *maples* värde av $\int_0^{\pi} f(x)dx$. Ger Riemannsummor en bra approximation av bestämda integraler? (2p+2p)

**Upgift 4 (MATLAB)**

**a)** Lös uppgifterna 1a) och 1b) med MATLAB. (4p)

**b)** Rita kurvan $y = \frac{1}{x^2} + \frac{ln\,x^2}{x^2} + cosh(sin(\pi x)),\ 1 \le x \le e$ och kurvan $C$ i uppg. 2c) med MATLAB. (4p)

**c)** Beräkna $\int_1^e \left( \frac{1}{x^2} + \frac{ln\,x^2}{x^2} + cosh(sin(\pi x)) \right) dx$ med MATLAB. (4p)

## Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

### A. Allmänt

**1)** Uppgifterna 1) – 3) skall du lösa med *maple* (eller *mathematica*), uppgift 4) med MATLAB. Lämna in hela ditt "worksheat", alltså alla kommandon ! För *maple*: Välj "*small output*" ( klicka på ”litet x” i verktygsraden). Skriv ditt namn och ditt personnummer med *maple* (ej för hand): på första sidan längst upp; sedan direkt bredvid "uppgift2" och bredvid "uppgift3". I PC-versionen kan du se var *maple* bryter sidor: *arkiv: Print Preview*!). Figurerna i uppgift 4) kan du lämna in på egna blad (glöm inte namn/persnr då!). Obs: för uppg.3b2) skall du lämna in en handskriven lösning. Men: Kommentera alla dina lösningar/resultat (gärna för hand)!

**2)** Förbered dig noggrant, innan du sätter dig vid datan (ffa uppg.1c). Läs gula boken. Men sedan kan du sätta igång ganska omedelbart: gå igenom bifogade exemplen först, de innehåller allt vad du behöver (och litet till). Är du ösäker på något, så läs den utförliga on-line-hjälpen i *maple*, som du får med ?, prova t.ex. ?*plot*, eller ?*D*, eller varför inte ??. Ändå fiffigare: tryck helt enkelt ctrl och F1, så kommer on-line-hjälpen om det ord cursorn står på eller precis efter (eller klicka på ”Hjälp”). I MATLAB får du hjälp med *help*.

**3)** Några allmänna tips för *maple*: Ett bra sätt att skriva in funktioner är att ange den "elementvisa tillordningen" $f : x \mapsto f(x)$, då är det sedan enkelt att beräkna *f(a)*, *f'* och *f'(a)*.
Öva in det med sinusfunktionen (se Ex2 (ffa tillägget)):
Skriv in det, kolla *maples* output !

```
>f:=x->sin(x);
>f(Pi/3);
>D(f);
>D(f)(Pi/3);
```

**4)** Figurerna kan du förse med en titel (*title* = `...din text...`, obs: fnuttar !), grafen kan du rita noggrannare (*numpoints* = *n*, *n* ett tal >49), tjockare (*thickness* = *m*, *m* ∈ {0,1,2,3}) och med annan färg (*color* = ...) (Läs ?*plot[options]* !).

## B. Till uppgifterna

**1a)** En matris *A* multipliceras med ett tal *a* med *>scalarmul(A,a)*. Läs också *>?evalm*. Se Ex1.
**2a)** Ta *numpoints*>900 !
**2b)** Att $f$ är jämn kan du ju "räkna ut" (*f(x) - f(-x) = ...)*, men t.om. det finns i *maple*: *>type(f(x),evenfunc(x));* Beräkna höger- och vänstergränsvärdet för att vara säker att gränsvärdet existerar (tydligen beräknar *maple* bara vänstergränsvärdet)! Vill du kolla om de är lika, kan du göra det snyggt med "Boolesk evaluering": >e*valb(limit(f(x),x=0,left)= limit(f(x),x=0,right));* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ får du med *>limit(f(x),x=infinity).* Men OBS, *maple* svarar fel! Skriv om $f$ först (t.ex. $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^2}}$ ).

**2b4)** Du måste kolla om $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$ existerar (kolla höger och vänster-gränsvärde)!!

**2b5)** Du kan beräkna *f*:s största/minsta värde med *>maximize(f(x),x)* resp *>minimize(f(x),x)*, (vill du beräkna största värde som $f$ antar på [*a*,b], så skriver du *>maximize(f(x),x,a..b)*, infinity tillåtet, men inte π), men du skall motivera det (mha $f'$ >0, resp <0)! Analogt i b6) !

**3)** Integrerar gör du med *>int(f(x),x)* för obestämd integral, resp *>int(f(x),x=a..b)* för bestämd integral; vill du först "se" din integral, så skriv *Int* i.st.f. *int* och sedan *value(%)*. Maple räknar fram allmänna (komplexa) lösningar, vill du få reellvärda funktioner (för att kunna rita) måste du skriva om dem, t.ex. $ln|x|$ i.st.f. $\ln x$ ; och inversa *sinh-*, *tanh-* och *cosh* -funktionerna kann du skriva m.h.a. *ln* genom att "convertera" dem: Se exemplet3. Vilken primitiv funktion? Beräkna t.ex. *F(1)*! Partialbråksuppdelningen får du med *>convert(f(x),parfrac,x)* !

**3c)** Ladda in student - paketet, då kan du rita funktioner och de tre efterlysta Riemannsummorna (med *>leftbox(f(x),x=a..b,n,);* osv), beräkna Riemannsummorna (med *leftsum(f(x),x=a..b,n)*; (och *>evalf*...). Se Ex3.

**4)** Med *>hold on* ritar du flera kurvor i samma diagram (stängs av sedan med *>hold off*). Läs gula boken och *help plot, help fplot, ,help subplot, help axis, help title* osv. Numerisk beräkning av bestämda integraler görs med *quad*, men funktionen du vill integrera, måste du först skriva in som en ”funktionsfil”. Se Ex4. Observera skillnader (*ln – log, Pi – pi, arctan – atan, inverse – inv, linsolve(A,B) – A\B* osv). Det finns en bra handledning av Jörgen Löfström: Matematik med MATLAB, som du kan hämta från nätet: http://ww.math.chalmers.se/~jorgen.

**Anmärkning:** I exempel 2 löser vi följande tenta-uppgift med datorn :

Låt $f(x)=\frac{ln(\cos x)}{x^2}$ för $0\neq x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ och $f(0)=a$.

Bestäm $a$ så att $f$ är kontinuerlig i 0. [svar: -0.5]

Det klarar vi även utan datorn: Bara "standardgränsvärden" får (och skall) användas för att beräkna $a=\lim_{x\to0} f(x)$. Flera "omskrivningar" är möjliga, t.ex.

$\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}=\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})(-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot x^2}$; så, nu är det klart, ty

$\frac{ln(1+h)}{h}\to1$ *då* $h\to0$ ($h=-2\sin^2\frac{x}{2}\to0$ *då* $x\to0$) och

$\frac{-2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}\to-\frac{1}{2}$ *då* $x\to0$ ty $\frac{\sin t}{t}\to1$ *då* $t\to0$ ··· .

**LYCKA TILL**
Bernhard, september 98