REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 1998

Moment 1: logik, mängdlära, Boolesk algebra

1. Vad är en (matematisk) utsaga?

2. Definiera $P \Rightarrow Q$ (P, Q utsagor).
Visa att $P \Rightarrow Q$, $\neg P \vee Q$ och $\neg Q \Rightarrow \neg P$ är ekvivalenta utsagor.

3. Definiera $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ (A B mängder).

4. Vad är en Boolesk algebra? Exempel?

5. Vad är vitsen med induktionsaxiomet?

6. Vad är mängderna $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Kan du visa att $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$?

7. Vad är potensmängden $P(M)$? Vad är (den kartesiska) mängdprodukten $A \times B$?
Vad är en relation? Vad är en funktion? Vad menas med $f: \underset{x}{X} \to \underset{y}{Y}$?

Testa dig med inlämn.uppg. 1
och extrauppgift 1

Moment 2: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet, elementära funktioner

1. Kan du skriva upp definitionerna för $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to a+} f(x) = A$,
$\lim_{x \to a-} f(x) = A$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$, $f(x) \to \pm\infty$, då $x \to a\,(a\pm, \pm\infty)$?

2. Vilka "gränsvärdesregler" användes i exempel 1 (sid. 2:04) ?
Kan du visa gränsvärdesreglarna?

3. Vad är en kontinuerlig funktion? Varför är kontinuitet en så viktig egenskap?

4. Vad är en deriverbar funktion? Är en kontinuerlig funktion deriverbar?
Är en deriverbar funktion kontinuerlig?

5. Stämmer påståendet: $\lim_{x \to a+} f'(x) = \lim_{x \to a-} f'(x) \Rightarrow f$ deriverbar i a ?

6. Kan du (formulera och visa) deriveringsreglerna?

7. Vad ger $f'(a)$? Kan du skriva upp en ekvation för tangenten..?

8. Vad är en injektiv funktion? Vad är f^{-1} (f *invers*)?
Kan du derivera f^{-1} och visa din formel?

9. Vad är lokala extrempunkter (lokala maxima/minima)?
Hur kan du eventuellt hitta dem m.h.a. derivatan?

10. Vad är en stationär punkt? Är stationära punkter (lok) extrempunkter?

11. Kan du (formulera, visa) Rolles och Lagranges sats?
Vilka tillämpningar har Lagranges sats?

12. Vad menas med att en funktion är växande/avtagande ? konvex/konkav?
Hur kan du eventuellt m.h.a. derivatan avgöra om en funktion är växande/avtagande, resp konvex/konkav? Injektiv? Är en strängt konvex funktion injektiv? Deriverbar?

13. Hur definieras funktionerna

$\ln x,\ e^x,\ x^a,\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \sinh x,\ \cosh x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x$?

Kan du härleda derivatorna till dessa funktioner?

14. Kan du standardgränsvärdena $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x\to 0} x\ln x$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$?

Kan du visa dem ?

Så fort vi har gått igenom de elementära funktionerna (ev. tidigare !) kan du ge dig på inl.uppg 2 och 3 och extrauppgift 2.

Moment 3: integral

1. Vad är en primitiv funktion till f? Hur konstruerar man primitiva funktioner?

2. Vad är $\int f(x)dx$ resp $\int_a^b f(x)dx$?

3. Kan du partialbråksuppdela rationella funktioner?

4. Vad är en Riemann-summa?

Gör nu inlämningsuppgift 4 och extrauppgift 3

Moment 4: geom. vektorer, matriser, determinanter, ekvationssystem

1. Vad är en geometrisk vektor? Hur adderas vektorer?

2. Vad är skalärprodukten, resp vektorprodukten? Trippelprodukten?
Visa att i ett ON-högersystem $0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ gäller :

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\Rightarrow\ \vec{a}\bullet\vec{b}=\sum_{k=1}^{3}a_kb_k \quad \text{och} \quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \ .$$

3. Vilka räkneregler gäller för matriser? För determinanter?
Vad är A^t, A^{-1}? Kan du beräkna A^{-1}? Vad ger dig determinanten angående lösbarheten av ekvationssystem, existensen av A^{-1}?

Gör nu inlämningsuppgift 5 och extrauppgift 4.

EXTRAUPPGIFTER

1) Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra och $x,y,z\in M$.

a) Visa **a1)** $x+x\cdot y\cdot z+x'\cdot y'=x+y'$.

a2) $(x+y')\cdot(x+z')=x+y'\cdot z'$.

b) Uttryck $x\cdot y'+x'\cdot y$ m.h.a enbart $\cdot$ och $'$ (AND-grind och NOT-grind).

c) Visa med induktion att i en Boolesk algebra $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ gäller :

För alla $N\in\mathbb{N}$ gäller $\left(\prod_{k=1}^{N}x_k\right)'=\sum_{k=1}^{N}x_k'$ och $\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)'=\prod_{k=1}^{N}x_k'$

($x_1,x_2,\cdots,x_N\in M$; $\prod_{k=1}^{N}x_k=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_N$ = produkten av $x_1,x_2,\cdots,x_N$).

Formulera påståendet för utsagor och för mängder (t.ex. $\left(\bigcap_{k=1}^{N}A_k\right)^c=\bigcup_{k=1}^{N}A_k{}^c$ ...).

d) Låt $f(x)=\ln\sqrt{x^{x^2}}$ $(x>0)$. Visa att $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}x^{2-n}(n-3)!$ för alla $3\le n\in\mathbb{N}$.

2a) Visa entydigheten av gränsvärdet, dvs $\left(\lim_{x\to a}f(x)=A\wedge\lim_{x\to a}f(x)=B\right)\Rightarrow(A=B)$.

b) Emil och Emilia har gjort en smörgås: en rund brödskiva med schweizerost på (den där med många hål). Kan de dela mackan med ett rakt snitt så att bägge får lika mycket bröd och lika mycket ost ? (svar: teoretiskt ja, visa det ! I praktiken nej (visa inte det)).

c) Visa fixpunktsatsen: Om f är en kontinuerlig funktion med $D_f=[0,1]$, $V_f\subseteq[0,1]$, så finns det en punkt $x_0\in[0,1]$ så att $f(x_0)=x_0$.

d) Visa att $\frac{a}{b}<\frac{\sin a}{\sin b}$ för $0<a<b<\pi$.

e) Visa att $\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}+1}<1-x$ för $0<x<1$.

f) Visa att $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$, $D_f=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, är injektiv, bestäm värdemängden V_f, och $D\left(f^{-1}\right)\left(\frac{3}{2\pi}\right)$. **svar**: $\left(0,\frac{2}{\pi}\right)$, $\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi-\sqrt{3})}$

3a) Beräkna $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\sqrt{nk}}{n^3+k^3}$.

b) Beräkna $\int_{-8}^{8}\frac{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{|x|}}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

c) Beräkna arean av det område i *xy*-planet som begränsas av *x*-axeln, linjen $x = ln\left(\sqrt{3}\right)$ och kurvan $y = \dfrac{2x + ln3}{cosh\, x}$.

d) Beräkna $F(x)$, då $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^4 x}}$ och $F(0) = 0$.

Har $F(x)$ ett gränsvärde då x går mot $-\frac{\pi}{2}$ från höger ?

svar: a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $12 - 3ln5$ **c)** $\frac{\pi\, ln3}{3}$ **d)** $ln\left|tan\, x + \sqrt{tan^2 x + 2}\right| - ln\sqrt{2}$, nej

4a) Bestäm avståndet mellan punkten (1,2,3) och det plan genom origo som innehåller skärningslinjen mellan planen $x - 3y + 5z + 1 = 0$ och $2x - 5y + 7z + 1 = 0$.

b) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b1) Är A inverterbar? Om ja beräkna A^{-1}.

b2) Lös $A^2XB + AB = A^2X$.

svar: a) 1 **b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \\ -11 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

c) En ljusstråle sänds från punkten $(-2,-1,3)$ längs linjen $y = -1, x + z = 1$ mot planet $2x + 2y - z = 0$, där ljusstrålen reflekteras så att utfallsvinkeln är lika med infallsvinkeln. Var träffar den reflekterade ljusstrålen planet $x + y = 5$? **svar**: (3,2,1).

d) Lös matrisekvationen $AXB + 2AX = C$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

svar: $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Lycka till !

Bernhard