Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1999-01-13, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.
===

1. Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra och $x, y, u, v \in M$.

Sätt $a = (x \oplus y) + (u \oplus v)$, $b = (x + y) \oplus (u + v)$.
Visa att $a \cdot b = x \cdot y' \cdot u' \cdot v' + y \cdot x' \cdot u' \cdot v' + u \cdot x' \cdot y' \cdot v' + v \cdot x' \cdot y' \cdot u'$.

[$x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y$, ”binär evaluering” godtas ej som bevis!] (3p)

2. Visa att för alla $N \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{N} k \cdot k! = (N+1)! - 1$ $[n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n]$. (4p)

3. Givna är planen $\pi_1 : x + 2y + z = -1$, $\pi_2 : 3x - 2y + z = -1$.

a) Visa att planen π_1, π_2 är vinkelräta mot varandra. (2p)

b) Bestäm ett plan π_3 som innehåller punkten $(1, -2, 0)$ och är vinkelrätt mot π_1 och mot π_2. (3p)

c) Bestäm skärningspunkten mellan planen π_1, π_2 och π_3. (2p)

4. För vilka reella tal a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverterbar? (4p)

5. Beräkna arean av det område i xy-planet som begränsas av kurvorna

$y = \dfrac{x - x^2}{x^3 + x^2 + x + 1}$ och $y = \sin(\pi(x-1))$, $0 \le x \le 1$. (5p)

6. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{\sinh(x)}{1 + |x|}$.

a) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(\frac{3}{4 + \ln 16}\right)$. **b)** Är f deriverbar? (5+3p)

7. Man vet att $D_f = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(0) = 0$ och $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tan^2(x)}}$ för $|x| < \frac{\pi}{4}$.

a) Bestäm f och V_f. **b)** Var är f konvex resp. konkav? (6+3p)

8. **a)** Definiera $\lim_{x \to a} = A$. **b)** Visa att $\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0$. (2+3p)

c) Formulera och bevisa Rolles sats. BB (5p)

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1998-10-23, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x, y \in M$ gäller:

a) $x+y=(x\cdot y)+(x\oplus y)$. [$x\oplus y = x\cdot y' + x'\cdot y$,

b) $x\cdot y=(x+y)\cdot(x\oplus y)'$. "binär evaluering" godtas ej som bevis!] (4p)

2. **a)** Beräkna A^tA och AA^t då $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. (3p)

b) Bestäm a så att planen $\pi_1: x+2y+z=1$, $\pi_2: 3x+3y+az=6$ och $\pi_3: 2x+5y-z=1$ skär varandra längs en linje och ange denna linje. (5p)

3. **a)** Visa att $\cosh x+\cos x>2$ för alla $x\neq 0$. (4p)

b) Hur många lösningar har ekvationen $\cosh x-\cos x=x^2+1$? (4p)

c) Visa att funktionen $\cosh x-\cos x-x^2$ är konvex. (1p)

4. Låt $f(0)=a$ och $f(x)=x^{\sin x}$ då $x>0$.

a) Bestäm a så att f blir kontinuerlig på $[0,\infty)$. (3p)

b) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y=f(x)$ i punkten $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. (3p)

5. **a)** Bestäm en primitiv funktion till $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{x}}$. (4p)

b) Bestäm en primitiv funktion till $\dfrac{1}{\cosh x}$. (3p)

c) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y=\dfrac{1}{\cosh x}$ och linjen $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (3p)

6. Definiera skalära produkten av två geometriska vektorer och härled en formel för beräkning av denna i ett ON-system. (4p)

7. Definiera funktionerna $\ln x$ och e^x och härled formeln $De^x=e^x$. (5p)

8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessatsen. (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1998-08-21, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.
==

1. Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x,y,z\in M$ gäller:
$x\cdot(y\oplus z)=(x\cdot y)\oplus(x\cdot z)$ där $x\oplus y=x\cdot y'+x'\cdot y$.
[OBS: ”binär evaluering” godtas ej som bevis!] (4p)

2. Givna är punkterna $P_1:(1,2,3)$, $P_2:(2,3,1)$, $P_3:(0,1,2)$, $P_4:(3,2,1)$, $P_5:(-1,2,3)$.
Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom P_1 och P_2 och det plan som innehåller punkterna P_3, P_4 och P_5. (6p)

3. Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 1+x & 3 & 1 & 3 \\ x & 2x & 2 & x \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & x & 0 & x \end{vmatrix}=0\cdot$ (4p)

4. Låt $f(x)=x-ln(x^2+2x+2)$.
c) Hur många lösningar har ekvationen $f(x)=a$ för olika $a\in\mathbb{R}$? (6p)
d) Var är f konvex, resp konkav? (3p)

5. Låt $f(0)=1$ och $f(x)=\dfrac{sin\,x}{sinh\,x}$ då $x\neq 0$.
d) Visa att f är kontinuerlig
[OBS: Du skall alltså visa att f är kontinuerlig i varje $a\in\mathbb{R}$!]. (3p)
e) Visa att $f(x)<1$ för alla $0\neq x\in\mathbb{R}$ [dvs: f har ett strängt maximum i 0;
OBS: Deriverbarhet av f i 0 skall ej visas och får ej utnyttjas!]. (6p)

6. Visa att för alla naturliga tal $N\geq 4$ gäller att $\dbinom{2N}{N}>\dfrac{4^N}{N}$. (6p)

7. **a)** Definiera funktionen $arctan\,x$ och härled en formel för dess derivata. (4p)
b) Definiera skalärprodukt. (2p)
c) Definiera betingad sannolikhet. (2p)

8. Visa att om f är deriverbar i (a,b) med $f'(x)>0$ för alla $x\in(a,b)$ så är f strängt växande i (a,b). (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1998-01-14, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra. Visa att för $x,y,z \in M$ gäller:

a) $x+y = x+x'y$. (2p)

b) $xyz + x(y \oplus z) + y'(x \oplus z) = x + y'z \quad (xy = x \cdot y,\ \ x \oplus y = xy' + x'y)$. (4p)

2. Bestäm för alla värden på parametrarna a och b antalet lösningar till

ekvationssystemet $\begin{cases} x + 7y - 6z = b \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}$. (6p)

3. Låt $f(x) = arccos(x) - arctan(x)$.

e) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (6p)

f) Ange D_f och V_f. (3p)

g) Lös ekvationen $f(x) = 0$. (4p)

4. Låt $f(x) = \dfrac{1-|x|}{1+x^2}$.

f) Konstruera kurvan $y = f(x)$ med angivandet av extremvärden, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (7p)

b) Är f deriverbar i 0 ? (2p)

5. Låt $m_0 \in \mathbb{N}$; visa att för alla $N \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{m_0+k}{m_0} = \binom{m_0+1+N}{m_0+1}.$$ (6p)

6. **a)** Definiera vektorprodukt. (2p)

b) Definiera invers matris. (2p)

c) Definiera betingad sannolikhet. (2p)

7. Visa att om är deriverbar i (a,b) och har ett lokalt maximum i en punkt $\xi \in (a,b)$ så är $f'(\xi) = 0$. (4p)

BB

CTH&GU matematiska institutionen

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1997-08-22, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

---

1. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller : $9^n + 7$ är delbart med 8. (5p)

2. Visa att för mängder A, B, D gäller:
$$(A \cap B \cap D) \cup (A \cap B \cap D^c) \cup (A \cap B^c \cap D) \cup (A^c \cap B \cap D) =$$
$$= (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (A \cap D)$$
[M^c är komplementet till M] . (4p)

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & a & a+2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna $detA$ (A:s determinant); för vilka a är A inverterbar? (5p)
b) Beräkna A^{-1} (den till A inversa matrisen) för $a = 1$. (4p)

4. Låt $f(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Ange en ekvation för normalen till kurvan $y = f(x)$ genom $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{e}\right)$. (3p)
b) Rita kurvan $\;=\;(\;)$ med angivandet av extrempunkter, asymptoter och konvexitet/konkavitet. (6p)
c) Hur många lösningar har ekvationen $(\;) = a \;\; (a \in \mathbb{R})$? (3p)

5. Beräkna $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinh(2x)}{2\,sin(x) + sin(2x)}$ [bara standardgränsvärden får användas]. (4p)

6. Anta att vi har ett parallellsystem med tre komponenter som fungerar oberoende av varandra med sannolikheten 90%.
Beräkna sannolikheten att parallellsystemet fungerar.
[OBS: Ett parallellsystem fungerar om åtminstone en komponent fungerar] (4p)

7. a) Definiera skalärprodukten mellan två vektorer i $\mathbb{R}^3$ och visa en formel för beräkning av denna i ett ON-system. (4p)
b) Definiera funktionen $arcsin(x)$ och härled formeln för dess derivata. (3p)

8. Formulera och bevisa Rolles sats. (5p)

BB

Svar till tentorna i matte del A för E1 (ht 99)

99-01-13

3b) $2x+y-4z=0$ **b)** $-\frac{1}{21}(8,4,5)$ **4)** $a\in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ **5)** utgår

6a) $Df^{-1}\left(\frac{3}{+4\ln 2}\right)=\frac{4(1+\ln 2)^2}{2+5\ln 2}$ **b)** ja **7a)** utgår **b)** konkav på $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$, konvex på $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

99-10-23

2a) $A^tA=\begin{bmatrix}5&5&4\\5&10&1\\4&1&5\end{bmatrix}$, $AA^t=\begin{bmatrix}6&1\\1&14\end{bmatrix}$ **b)** $a=12,\ l:\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-7\\3\\1\end{bmatrix}$

3b) **2** **4a)** $a=1$ **b)** $y=x$ **5)** utgår

98-08-21

2) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}2\right)$, $x-y+2z=3$, **3)** $x_1=x_2=0, x_3=2$

4a) 1 **b)** konkav i $[-2,0]$, konvex i $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$

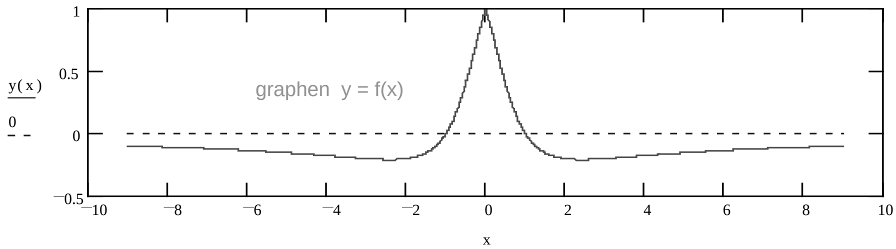
98-01-14

2) $a\neq 8$: 1 lösn. för varje b; $a=8$: oändl. många lösn då $b=8$, ingen då $b\neq 8$

3b) $D_f=[-1,1], V_f=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ **c)** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

5a) $max=f(0)=1, min=f\left(\pm\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$, asymptot är $y=0$,

f är konvex i $M=\left[-2-\sqrt{3},\sqrt{3}-2\right]\cup\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$ och konkav i M^C. **b)** nej



97-08-22

3) $det\ A=-3a^2-4a+4$;

A^{-1} existerar $\Leftrightarrow$ $a\notin\{-2,\frac{2}{3}\}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}&1\\\frac{10}{3}&-2&\frac{1}{3}&1\\-1&1&0&-1\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$$

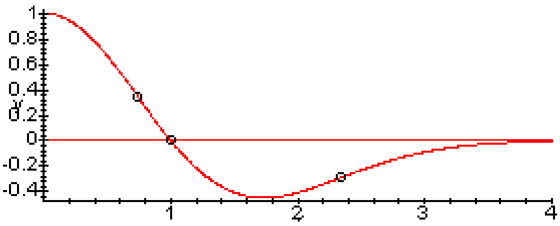
4a) $y=\frac{e}{\sqrt{2}}-2\cosh 1$

4b) 0 maxpkt, $\pm\sqrt{3}$ minpkt, $y=0$ asymptot,

f konkav i $\left(-\infty,-\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]\cup\left[-\sqrt{3-\sqrt{6}},\sqrt{3-\sqrt{6}}\right]\cup\left[\sqrt{3+\sqrt{6}},\infty\right)$

f konvex i $\left[-\sqrt{3+\sqrt{6}},-\sqrt{3-\sqrt{6}}\right]\cup\left[\sqrt{3-\sqrt{6}},\sqrt{3+\sqrt{6}}\right]$

Så ser grafen ut (för $x>0$, f är ju jämmn):



4c)

$a<-\frac{2}{e\sqrt{e}}$: 0 lösn

$a=-\frac{2}{e\sqrt{e}}$: 2 lösn

$-\frac{2}{e\sqrt{e}}<a<0$: 4 lösn

$0\leq a<1$: 2 lösn

$a=1$: 1 lösn

$a>1$: 0 lösn

5) ½ **6)** utgår