VECKANS PROBLEM

- Du lär dig väldigt mycket av att prata med andra, att behöva förklara för andra dina idéer, lösningar, vad du gjorde, vad du menade. Lös dessa uppgifter hemma, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt och ta med dem till räknestugan. Där skall du "försvara" dem i smågrupp (högst 4), där skall du också kritiskt titta på de andras lösningar, diskutera dem och allt kringliggande: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Kanske måste ni först gå igenom (delar av) föreläsningen?
- För denna smågruppsdiskussion är de sista 20 minuterna i torsdagsräknestugan avsatta.
- Tänk på att du måste träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifterna liknar tenta-uppgifter, utnyttja denna chans!
- Övningsledaren skall fungera som "diskussionsledare" och hjälpa då gruppen ej kan enas (komma fram till något). Låt honom titta på dina lösningar ("skulle det här duga?").
- Samtidigt delas ut "repetitionsfrågor"; ta gärna upp dem också i diskussionen, de liknar teorifrågor på tentan, och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte.
- Lösningar (ev. med kommentarer och nya frågor) delas ut tidigast veckan efter… .

PROBLEM 1 (lösningen skall vara klar tors 9/9)

Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y \in M$ och $x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y$.
Visa: $x + y = x \oplus y \Leftrightarrow xy = 0$.

Titta först på den speciella Booleska algebran $P(M)$ ("mängdalgebran"), verkar inte påståendet trivialt där? Hur skulle det se ut för utsagor? Men varför duger inte ett bevis med "sanningstabell" (binär evaluering) för det allmänna fallet?

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 1999

Moment 1: logik, mängdlära, Boolesk algebra, kombinatorik

1. Vad är en matematisk utsaga?
2. Definiera $P \Rightarrow Q$ (P, Q utsagor).
   Visa att $P \Rightarrow Q$, $\neg P \vee Q$ och $\neg Q \Rightarrow \neg P$ är ekvivalenta utsagor.
3. Definiera $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ (A,B mängder).
4. Vad är en Boolesk algebra? Exempel?
5. Vad är vitsen med induktionsaxiomet?
6. Vad är mängderna $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Kan du visa att $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$?
7. Vad är potensmängden $P(M)$? Vad är (den kartesiska) mängdprodukten $A \times B$?
8. Vad är en relation? Vad är en funktion? Vad menas med $f: \begin{array}{c} X \to Y \\ x \mapsto y \end{array}$?
9. Vad är permutation? Fakultet? Binomialkoefficienten? Vad ger de?

EXTRAUPPGIFTER

1) Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra och $x,y,z\in M$.

a) Visa **a1)** $x+x\cdot y\cdot z+x'\cdot y'=x+y'$.

a2) $(x+y')\cdot(x+z')=x+y'\cdot z'$.

b) Uttryck $x\cdot y'+x'\cdot y$ m.h.a. enbart $\cdot$ och $'$ (AND-grind och NOT-grind).

c) Visa att $(x\oplus y)'=x'\oplus y=x\oplus y'=x'y'+xy$.

d) Visa med induktion att i en Boolesk algebra $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ gäller :

För alla $N\in\mathbb{N}$ gäller $\left(\prod_{k=1}^{N}x_k\right)'=\sum_{k=1}^{N}x_k'$ och $\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)'=\prod_{k=1}^{N}x_k'$

($x_1,x_2,\cdots,x_N\in M$; $\prod_{k=1}^{N}x_k=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_N$ = produkten av $x_1,x_2,\cdots,x_N$).

Formulera påståendet för utsagor och för mängder (t.ex. $\left(\bigcap_{k=1}^{N}A_k\right)^c=\bigcup_{k=1}^{N}A_k{}^c$ ...).

2) Visa med induktion att $2\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n+k}k^2=N+N^2$ för alla $N\in\mathbb{N}$.

3) Beräkna den konstanta termen i utvecklingen av $\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\sqrt{3}\,x\right)^{10}$ och avgör om den är ett rationellt tal. (svar: $9072\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$)

4) Den övningsgrupp som Emil och Emilia tillhör består av 20 teknologer. Eftersom Emil och Emilia jämt bråkar får de inte sitta bredvid varandra och inte bakom varandra. På hur många olika sätt kan de placeras?
Teknologerna sitter i fem rader, fyra i varje rad. (svar: 318)