VECKANS PROBLEM

Lösningsförslag till VP2

1) Nå?
2) På hur många olika sätt kan man dela in 210 E-teknologer i 7 övningsgrupper a, b, c, d, e, f, g om 30 elever?

   Jo, första gruppen kan man välja på $\binom{210}{30}$ olika sätt, nästa på $\binom{180}{30}$, nästa på $\binom{150}{30}$ osv, svaret blir alltså $\binom{210}{30} \cdot \binom{180}{30} \cdot \binom{150}{30} \cdot \cdots \cdot \binom{30}{30} = \frac{210!}{(30!)^7}$, det var en jädrans massa det (*maple* säger att det var
   1145412954041135551418586388387177726464229323100230642543525551307
   9388722212413883862951812607730342746485981129074276163215289345354
   65042199539675085368543365045210316800.

   Svårt att läsa? Det är $\approx 1.145412954 \cdot 10^{171}$).
3) Visa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$: En mängd med n element har 2^n delmängder,

   och dessa fås ju så här: Först alla delmängder med 0 element ($\binom{n}{0}$ st finns), sedan med 1 element ($\binom{n}{1}$ st finns), sedan med 2 element ($\binom{n}{2}$ st finns) osv., addition ger totala antalet: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ vsv.

   Naturligtvis kommer du ihåg "räkningen" $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$ från föreläsningen.

PROBLEM 3 (lösningen skall vara klar tors 23/9)

1) Låt $f(x) = \sqrt{1-x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}\right)$.

Beräkna $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Har f ett gränsvärde då x går mot 0?

2) Visa fixpunktsatsen:
Om $f : [0,1] \to [0,1]$ är kontinuerlig med $D_f = [0,1]$ så finns det en punkt $x_0 \in [0,1]$ så att $f(x_0) = x_0$ (en sådan punkt kallas *fixpunkt* till f).

Moment 2: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet, elementära funktioner

1. Kan du skriva upp definitionerna för $\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a+} f(x) = A$,
$\lim_{x\to a-} f(x) = A,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = A,\ f(x) \to \pm\infty$, då $x \to a\ (a\pm, \pm\infty)$?

2. Vilka "gränsvärdesregler" användes i exempel 1 (sid. 2:04) ?
Kan du visa gränsvärdesreglarna?

3. Vad är en kontinuerlig funktion? Varför är kontinuitet en så viktig egenskap?

4. Vad är en deriverbar funktion? Är en kontinuerlig funktion deriverbar?
Är en deriverbar funktion kontinuerlig?

5. Stämmer påståendet: $\lim_{x\to a+} f'(x) = \lim_{x\to a-} f'(x) \Rightarrow f$ deriverbar i a ?

6. Kan du (formulera och visa) deriveringsreglerna?

7. Vad ger $f'(a)$? Kan du skriva upp en ekvation för tangenten?

8. Vad är en injektiv funktion? Vad är f^{-1} (f *invers*)?
Kan du derivera f^{-1} och visa din formel?

9. Vad är lokala extrempunkter (lokala maxima/minima)?
Hur kan du eventuellt hitta dem m.h.a. derivatan?

10. Vad är en stationär punkt? Är stationära punkter (lok) extrempunkter?

11. Kan du (formulera, visa) Rolles och Lagranges sats?
Vilka tillämpningar har Lagranges sats?

12. Vad menas med att en funktion är växande/avtagande, konvex/konkav?
Hur kan du eventuellt m.h.a. derivatan avgöra om en funktion är växande/avtagande, resp konvex/konkav? Injektiv? Är en strängt konvex funktion injektiv? Deriverbar?

13. Hur definieras funktionerna
$\ln x,\ e^x,\ x^a,\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \sinh x,\ \cosh x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x$?
Kan du härleda derivatorna till dessa funktioner?

14. Kan du standardgränsvärdena
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x},\ \lim_{x\to 0} x\ln x,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$?
Kan du visa dem ?

EXTRAUPPGIFTER

1) Visa entydigheten av gränsvärdet: $\left(\lim_{x\to a} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a} f(x) = B\right) \Rightarrow (A = B)$.

2) Emil och Emilia har gjort en smörgås: en rund brödskiva med schweizerost på (den där med många hål). Kan de dela mackan med ett rakt snitt så att bägge får lika mycket bröd och lika mycket ost ? (svar: teoretiskt ja, visa det! I praktiken nej (visa inte det)).