VECKANS PROBLEM

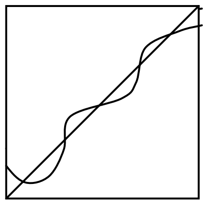
Lösningsförslag till VP3

1) $f(x)=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)=\dfrac{\sqrt{1-x}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{-\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}\right)}=$

[OBS $x=-\sqrt{x^2}=-|x|$ här, ty $x<0$ $\left(x\to-\infty\ !!\right)$] $=\dfrac{-1}{1+\sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}}=\dfrac{-1}{1+\sqrt{\frac{-\frac{1}{x}+2}{-\frac{1}{x}+1}}}$, alltså

är $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$. Samma omskrivning (tredje termen) ger $\lim\limits_{x\to0-} f(x)=-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=\frac{1}{2}$, f saknar alltså gränsvärde då x går mot 0.

2) Åskådligt är det väl klart: Eftersom f är kontinuerlig och $0\le f(x)\le 1$, så borde väl kurvan $y=f(x)$ någonstans korsa linjen $y=x$. Ett strängt bevis för det får vi genom att betrakta funktionen $g(x)=f(x)-x$:



g är kontinuerlig på $[0,1]$. Om $g(0)=0$ eller $g(1)=0$ så är vi färdiga (0 eller 1 är fixpunkt då); om $g(0)\neq 0$ och $g(1)\neq 0$ så är $g(0)>0$ och $g(1)<0$, värdet 0 ligger alltså mellan värdena $g(0)$ och $g(1)$, enligt satsen om mellanliggande värden finns det då ett x_0 mellan 0 och 1 (i själva verket $x_0\in(0,1)$) där g antar värdet 0, dvs. $f(x_0)=x_0$. vsv

PROBLEM 4 (lösningen skall vara klar tors 30/9)

1) Låt $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{då } x\neq 0\\ 0, & \text{då } x=0\end{cases}$.

a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?

b) Visa att f är injektiv på $\left[\frac{2}{\pi},\infty\right)$ och beräkna $D\left(f^{-1}\right)\left(\frac{9}{2\pi^2}\right)$.

c) Visa att f är strängt konvex på $\left[\frac{2}{\pi},\infty\right)$.

2) Låt $f(x)=\sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x>0$ och $f(0)=0$. Visa att f är kontinuerlig på $[0,\infty)$. Visa att f är injektiv på $[1,\infty)$. Är f injektiv i intervallet $(0,1)$?

Den här uppgiften lämpar sig utmärkt för långa lärorika diskussioner. Ta den riktigt på allvar. Den innehåller för det första en massa frågor, t.ex. (uppg1) är f kontinuerlig? Aha, kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd, och den är ju hela ∇ ; det blir troligtvis olika motiveringar för $x \neq 0$ resp $x = 0$, sak samma för deriverbar och för kontinuitet av f'; men för att se om f är deriverbar i 0 hjälper det inte att betrakta f' (varför inte????), utan vad måste göras?

Vad är injektiv? Vad är f^{-1} (f-invers, inte "f upphöjd till –1" !!!!)….
För det andra innehåller den utöver nyttiga räkningar och deriveringar träning att framställa dina tanker, att formulera, att skriva ner… .I uppg2 inser du troligtvis snabbt hur det ligger till, men det är inte så självklart hur du skall <u>visa</u> det (enbart satser som visats på föreläsningen får användas!). Gör en riktig bra, utförlig lösning hemma och ta med den till torsdagens räknestuga för att diskutera den med dina kompisar. Eventuellt skjuter ni upp några delar till nästa vecka.

EXTRAUPPGIFTER

1) Låt $f(x) = \ln\sqrt{x^{x^2}}$ $(x > 0)$.
   Visa att $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}x^{2-n}(n-3)!$ för alla $3 \leq n \in I\!N$.

2) Visa att $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin a}{\sin b}$ för $0 < a < b < \pi$.

3) Visa att $\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2} + 1} < 1 - x$ för $0 < x < 1$.

4) Visa att $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$, $D_f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, är injektiv, bestäm värdemängden V_f,
   och $D\left(f^{-1}\right)\left(\frac{3}{2\pi}\right)$. **svar**: $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$, $\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9\left(\pi - \sqrt{3}\right)}$

5) Låt $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.
   Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?
   Rita kurvan $y = f(x)$ med angivandet av asymptoter och konvexitet/konkavitet.