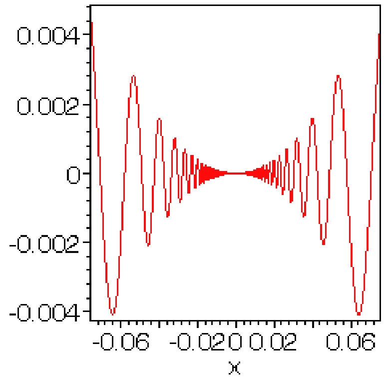
VECKANS PROBLEM

Lösningsförslag till VP4



1) a) f är deriverbar och därmed kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ och $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ ty f och f' är där sammansatta av deriverbara funktioner $(\cos(x), \frac{1}{x}, \sin(x)\ldots)$. Då undersöker vi om f är deriverbar i 0, d.v.s. om $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ har ett gränsvärde då x går mot 0:

$$0 \le \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{x^2\cos\frac{1}{x} - 0}{x}\right| = \left|x\cos\frac{1}{x}\right| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

instängningslagen ger då att $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ existerar, d.v.s. att f är deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$. Och därmed är f även kontinuerlig i 0 (visa detta direkt !). Men f' saknar gränsvärde då x går mot 0, ty $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$, men $\sin\frac{1}{x}$ saknar gränsvärde då x går mot 0, eftersom $\sin\frac{1}{x}$ i varje intervall $(-å, å)$ antar alla värden mellan -1 och 1, $f'(x)$ kan alltså inte gå mot ett gränsvärde då x går mot 0.

b) För $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} > 0$, ty då är $0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$, f är alltså strängt växande och därmed injektiv på $\left[\frac{2}{\pi}, \infty\right)$ (slutet intervall, ty f är kontinuerlig) och

$Df^{-1}\left(\frac{9}{2\pi^2}\right) = \dfrac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = a^2\cos\frac{1}{a} = \frac{9}{2\pi^2}$; försök med $a = \frac{3}{\pi}$: bingo $(\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$!),

svaret blir alltså $Df^{-1}\left(\frac{9}{2\pi^2}\right) = \dfrac{1}{Df\left(\frac{3}{\pi}\right)} = \dfrac{1}{\frac{2\cdot 3}{\pi}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\frac{3}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\pi}{6 + \sqrt{3}\pi}$.

2) Precis som i 1) gäller att $f(x) = \sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x} + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ är kontinuerlig i varje punkt $x > 0$, ty f är sammansatt av funktioner som är kontinuerliga i $(0,\infty)$. f är kontinuerlig även i 0, ty $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}\ln x + \sqrt{x}\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{7}{3}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{3}\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0 = f(0)$

(standardgränsvärden och $\sqrt{\ }$ är kontinuerlig!). Vidare är för $x > 1$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) + \frac{\sqrt{x}\cos x - \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{7}{6\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x\ln x + 2x + 6x\cos x - 3\sin x + 7x}{6x\sqrt{x}} = \frac{x\ln x + 6x(1 + \cos x) + 3(x - \sin x)}{6x\sqrt{x}} > 0$$ ty varje summand i täljaren är >0. Alltså är f strängt växande och därmed injektiv på $[1,\infty)$. Dessutom ser vi att $f' \to -\infty$ då $x \to 0+$, det finns alltså ett $\delta > 0$ så att $f'(x) < -1$ för alla $x \in (0,\delta)$ (t.ex.); f är alltså strängt avtagande i $[0, \delta]$, och därmed $f(\delta) < f\left(\frac{\delta}{2}\right) < 0$. Men eftersom f är kontinuerlig på $[\delta, 1]$ och $f(1) > 0$, så ger s.o.m.v. att f antar värdet $f\left(\frac{\delta}{2}\right)$ även i någon punkt $x_0 \in [\delta, 1]$, och således är ej injektiv på $(0\ \ 1)$ (värdet $f\left(\frac{\delta}{2}\right)$ antas i $(0\ \ \delta)$ och i $(\delta\ \ 1)$). Du ritar grafen i labben!

Anmärkning (diskutera detta på räknestugan!): skulle du acceptera följande lösningar:

A. påst.: är kontinuerlig i 0.
bev.: "Om är kontinuerlig i 0 så gäller $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$"… (som sedan visas korrekt).

B. påst.: är injektiv på $[a,\infty)$.
bev.: "Om är injektiv på $[a,\infty)$ så är $f' > 0$ i (a,∞)"…(som sedan visas korrekt).

C. bevis för att f i uppg.2 ej är injektiv i $(0,1)$:
"f' är negativ nära 0, positiv nära 1, alltså har f ett (lok) min i $(0,1)$, alltså är f ej injektiv i $(0,1)$".

PROBLEM 5 (lösningen skall vara klar tors 7/10)

a) Givna är linjerna $l_1 : 2x - 4 = y + 1 = z$ och $l_2 : x - y + 3z = 8,\ z = 2$.
Visa att linjerna skär varandra och ange en ekvation för det plan som innehåller l_1 och l_2. Bestäm även vinkeln mellan l_1 och l_2.

b) Bestäm för alla värden på parametrarna a och b antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 7y - 6z = b \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}.$$

EXTRAUPPGIFTER

1. Bestäm avståndet mellan punkten (1,2,3) och det plan genom origo som innehåller skärningslinjen mellan planen $x - 3y + 5z + 1 = 0$ och $2x - 5y + 7z + 1 = 0$. **svar:** 1

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Är A inverterbar? Om ja beräkna A^{-1}.

b) Lös $A^2XB + AB = A^2X$.

svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \\ -11 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3. En ljusstråle sänds från punkten $(-2,-1,3)$ längs linjen $y = -1, x + z = 1$ mot planet $2x + 2y - z = 0$, där ljusstrålen reflekteras så att utfallsvinkeln är lika med infallsvinkeln. Var träffar den reflekterade ljusstrålen planet $x + y + 5 = 0$? **svar**: (0,-5,1).