VECKANS PROBLEM

Lösningsförslag till VP5

a) Enklast är väl att lösa ekvationssystemet $\begin{cases} 2x-4=2 \\ y+1=2 \\ x-y=2 \end{cases}$ (jag satte in $z=2$), då fås ju direkt skärningspunkten $(3, 1, 2)$, eller skriv linjernas ekvationer så här :

l_1: $\frac{x-2}{\frac{1}{2}} = \frac{y-(-1)}{1} = \frac{z-0}{1}$, det ger l_1: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, analogt fås l_2: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

och bestäm nu $l_1 \cap l_2$ $(\ldots s=3, t=1)$.

Vinkeln mellan linjerna = vinkeln mellan riktningsvektorerna, och den fås med skalärprodukten: $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot cos\varphi$, alltså $1+2+0 = \sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1+0} \cdot cos\varphi$ och därmed $cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs $\underline{\varphi = 45^o}$.

En normalvektor för planet som innehåller linjerna är $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-2, 2, -1)$ (räkna ut det!!), alltså är planets ekvation $-2(x-3)+2(y-1)+(-1)(z-2)=0$ eller $\underline{2x-2y+z=6}$.

b) Bästa lösningen är att först beräkna koefficientmatrisens determinant. Är den $\neq 0$ så har systemet en entydigt bestämd lösning för varje högerled, alltså för varje b. Och sedan löser man systemet för de värden på a för vilka determinanten är 0. Men vi tar med högerledet på en gång, samma radoperationer ger ju determinanten:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} rad2-2*rad1 \\ rad3-3*rad1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 0 & -11 & 13 & 5-2b \\ 0 & -22 & a+8 & 2-3b \end{array}\right] = [rad3-2*rad2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 0 & -11 & 13 & 5-2b \\ 0 & 0 & a-8 & -8+b \end{array}\right]$$

och detta ger att determinanten är $-11(a-8)$ (= produkten av elementen i huvuddiagonalen), för $a \neq 8$ har systemet alltså precis en lösning för varje b, för $a=8$ fås ovan $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 0 & -11 & 13 & 5-2b \\ 0 & 0 & 0 & -8+b \end{array}\right]$, och detta ger att det finns oändligt många lösningar om $b=8$ och ingen lösning om $b \neq 8$.

svar: $\begin{cases} a \neq 8: \text{ en lösning för varje } b \\ a = 8: \text{ oändligt många lösningar då } b=8 \\ \qquad\quad \text{ingen lösning då } b \neq 8 \end{cases}$

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 1999

Moment 3: geom. vektorer, matriser, determinanter, ekvationssystem

1. Vad är en geometrisk vektor? Hur adderas vektorer?
2. Hur definieras och vad ger skalärprodukten, vektorprodukten, trippelprodukten?
3. Visa att i ett ON-högersystem $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gäller:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k \quad \text{och} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

4. Hur beskrives linjer, plan? Hur beräknas avstånd punkt-linje, punkt-plan, spegelpunkten i linje, i plan?
5. Vilka räkneregler gäller för matriser? För determinanter?
6. Vad är A^t, A^{-1}? Kan du beräkna A^{-1}? Vad ger dig determinanten angående lösbarheten av ekvationssystem, existensen av A^{-1}? Cramers regel?

EXTRAUPPGIFTER

1) Lös matrisekvationen $AXB + 2AX = C$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

och $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

svar: $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

2) Bestäm för alla värden på a och b (a, b reella tal) antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} x + 2ay - az + 3w = 1 \\ -x - 2ay + 4az + (a-4)w = b-1 \\ x + (2+2a)y + w = 3 \\ 2x + (2+4a)y - az + (a+6)w = b+2 \end{cases}.$$

svar: $\begin{cases} a \notin \{0, -2\}: \text{ precis en lösning för varje } b \\ a = 0: \text{ oändligt många lösningar då } b = \frac{2}{3}, \text{ ingen lösning då } b \neq \frac{2}{3} \\ a = -2: \text{oändligt många lösningar då } b = 2, \text{ ingen lösning då } b \neq 2 \end{cases}$