Matematiska Institutionen
CTH & GU

Veckans Problem 3

(Lösningen till del a) skall vara klar tors. 16/11)

a) Lös differentialekvationen $(x^2-1)y'-xy=0$.

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $(2xy+x^2)y'=3y^2+xy+x^2$ som går genom punkten $(1,0)$.

Repetitionsfrågor

Vad är en differentialekvation?, Definiera begreppet 'ordning' för en differentialekvation. Vad innebär det att en differentialekvation är 'ordinär'? Vad är en (ordinär) linjär differentialekvation av första ordningen? Formulera och bevisa (eller snare bevisa och formulera, då ju bevismetoden är det viktiga och i andra hand formeln) satsen om lösningar till en (ordinär) linjär differentialekvation av första ordningen. Vad är den 'integrerande faktorn'? Vad är en 'separabel' differentialekvation? Formulera och bevisa en sats om lösning av separabla differentialekvationer. Vad är differentialformen av en separabel differentialekvation? Vad betyder det att lösningar ges implicit? Vad är en allmän lösning? Vad är en singulär lösning? Kan två olika differentilekvationer ha samma differentialform? Vad innebär skarvning av lösningar? Hur löses $y'(x)=f(ax+by)$? Hur löses $y'(x)=f(y/x)$? Vad är Bernoullis differentialekvation och hur löser man den?

Extrauppgifter

- Verifiera att $y(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt+e^{x^2}$ löser $y'-2xy=1$.
- Lös $(1-x^2)y'-y=(1+x)^2(1-x)$ för $-1<x<1$ med $y(0)=1$.
  Svar: $y(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2+x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$.
- Lös på största möjliga mängd $(x^2-1)y'-xy=0$ och ange den mängden.
  Svar:
  $y(x)=C_1\sqrt{x^2-1},\ x<-1,\ y(x)=C_2\sqrt{1-x^2},\ -1<x<1,\ y(x)=C_3\sqrt{x^2-1},\ 1<x.$
- Vid ett elavbrott var det eluppvärmda husets termostater inställda på 20°C, men eftersom det var konstant −9°C ute hade innetemperaturen kl. 17.00 sjunkit till 16°C och kl. 18.00 till 14°C. När inträffade strömavbrottet? Vad var innetemperaturen när strömmen återkom kl. 19.07?
  Svar: kl. 15.13, 12°C.
- Lös integralekvationen $\int_1^x (x+t)f(t)\,dt=x-1$.
  Svar: $f(x)=1/(2x\sqrt{x})$.