Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del A (TMA042), ht 1999

- Till varje matte-kurs ges datorlaborationer i *Maple* och *MATLAB* (i del A bara *Maple*). Syftet är att du skall bekanta dig med och börja använda dessa program, dels för att öka förståelsen för det du just håller på med i matten, dels för att du behöver kunna utnyttja dem senare (inte bara i matte-kurser).
- Denna laboration kan ge 4 bonuspoäng vid tentamina i matematiska metoder för E1 del A, 22/10, 12/1 och 18/8: uppgift 1 och 3 kan ge 1 BP var, uppgift 2 kan ge 2 BP. Dela upp laborationen: uppgift 1 kan du sätta i gång med omedelbart, uppgift 2 bör du göra lv 4-6, uppgift 3 lv 6/7; lv 6/7 finns det schemalagd tid (med lärare) för genomförandet.
- Laborationen skall lämnas senast fr, 15/10, kl 9^{45} (efter föreläsningen) till mig. Häfta ihop lösningarna till de tre uppgifterna. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad (se anvisningar), blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Laborationen lämnas tillbaka med del A-tentan.

Uppgift 1 (olikheter, Boolesk algebra, kombinatorik)

a) För vilka reella x gäller $|x+1|>|x-2|$?

b) För vilka reella x gäller $x+6 \geq \dfrac{20}{3-x}$?

c) Låt $\langle M,+,\cdot,',0,1\rangle$ vara en Boolesk algebra, $x,y,z \in M$.
Visa $x+x\cdot y\cdot z+x'\cdot y'=x+y'$ och $(x+y')\cdot(x+z')=x+y'\cdot z'$
genom att använda *bsimp* på vänsterledet.
Bestäm även den konjunktiva och den disjunktiva normalformen för vänsterledet.

d) Beräkna $5!$, $49!$, $\binom{7}{3}$, $\binom{39}{7}$, $\binom{210}{30}$ och $\dfrac{210\,!}{(30!)^7}$.

e) Utveckla $\dfrac{4}{9}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)^{16}$.

Upgift 2 (funktioner, gränsvärde, derivata)

a) `"Lita aldrig på figurer"` (vp4):

Låt $f(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{x}\,\ln x+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x>0$ och $f(0)=0$.

a1) Rita kurvan $y=f(x)$ för $0<x<40$, för $0<x<16$ och för $0<x<1$.
Då tror du väl att f är injektiv ? Nix! Rita kurvan även för $0<\quad<0.0001$!

a2) Beräkna $f(1)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $f'(x)$, $f'(1)$ och $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$.

b) `"Lita inte alltid på maple"`:

Låt $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0)=1$.

b1) Rita kurvan för $-9 < x < 9$ (snyggt, va ?).

Då förmodar du att f är jämn, kontinuerlig, konkav i $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ och inte deriverbar i $\frac{\pi}{2}$:

b2) Visa utan datorn att f är jämn, kontinuerlig och har x-axeln som asymptot.

b3) Visa med datorn att f är jämn, kontinuerlig i 0 och har x-axeln som asymptot.

b4) Avgör med datorn om f är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

b5) Rita kurvan $y=f'(x)$ $(-9 < x < 9)$ och motivera med hjälp härav att f antar sitt största värde i 0.

b6) Rita kurvan $y=f''(x)$, $(-\pi < x < \pi)$ och bestäm med hjälp härav var f är konvex/konkav i $[-\pi,\pi]$.

c) `"Låt maple hjälpa dig …"`:

Låt $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$ och $g(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$.

c1) Bestäm D_f och D_g.

c2) Rita kurvorna $y=\pm f(x), x\in D_f$ och $y=\pm g(x), x\in D_g$ i samma diagram.

c3) Kurvorna i c2) ger en "sluten" kurva C. I vilka punkter har C en lodrät, resp. en vågrät tangent? Har C en tangent i origo?

Uppgift 3 (analytisk geometri)

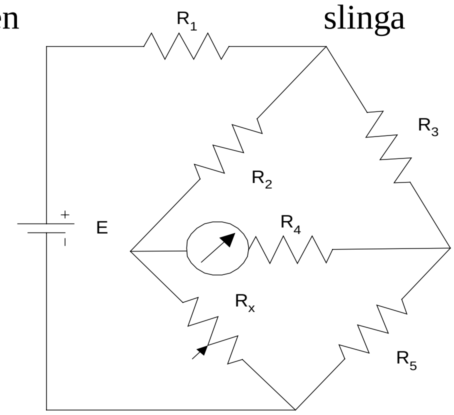
a) Låt $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ -9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ -3 & 7 & 5\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$.

Beräkna AB, BA, $\det A$ och A^{-1}.
Lös matrisekvationen $AX=B$ och ekvationssystemet $AX=18D$.

b) Låt $\vec{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}6\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ och $\vec{\boldsymbol{c}}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Beräkna $\vec{\boldsymbol{a}}\bullet\vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}$ och $\left[\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}\right]=\vec{\boldsymbol{a}}\bullet\left(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}}\right)$.

c) I figuren visas en resistensbrygga, som är kopplad till en spänningskälla med spänningen $E = 100V$. I bryggan finns ett mätinstrument inkopplat. Vi vill bestämma strömmen genom detta som funktion av den variabla resistansen R_x i intervallet $10 \leq R_x \leq 40$.
För varje R_x-värde får vi ett linjärt ekvationssystem att lösa. Detta sätts upp genom slinganalys m.h.a. Ohms lag (spänningsfallet V över en resistans R p.gr.a. strömmen I ges av $V = RI$) och Kirchhoffs lag (spänningsfallet runt en slinga är noll). Det blir bara fyra element i 3x3 matrisen som beror på R_x. Bestäm strömmen genom instrumentet som funktion av R_x. Rita sedan denna funktion för $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 5\Omega$ och $R_5 = 10\Omega$.
Kolla, att du satt upp rätt ekvationssystem, genom att ta med en extra slinga (du får då ett överbestämt ekvationssystem). Vad händer då R_x väljs större och större?



Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

A. Allmänt

- Uppgifterna skall du lösa med *maple* (eller *mathematica*). Lämna in hela ditt "worksheat", alltså alla kommandon! Skriv ditt namn och ditt personnummer med *maple* (ej för hand): på första sidan längst upp, sedan direkt bredvid "uppgift2" och bredvid "uppgift3". I PC-versionen kan du se var *maple* bryter sidor: *arkiv: Print Preview*! Obs: för uppg.2b2) skall du lämna in en handskriven lösning. Men: du skall kommentera alla dina lösningar/resultat (gärna för hand)!
- Förbered dig noggrant, innan du sätter dig vid datorn (ffa uppg.3c). Titta på laboration nr 3 i "Datoranvändning E 1"! Sedan kan du sätta igång ganska omedelbart: gå igenom bifogade exemplen först, de innehåller allt vad du behöver (och litet till). Är du osäker på något, så läs den utförliga on-line-hjälpen i *maple*, som du får med ?, prova t.ex. ?*plot*, eller ?*D*, eller varför inte ??. Ändå fiffigare: tryck helt enkelt ctrl och F1, så kommer on-line-hjälpen om det ord cursorn står på eller precis efter (eller klicka på "Hjälp").
- Några allmänna tips för *maple*: Ett bra sätt att skriva in funktioner är att ange den "elementvisa tillordningen" $f : x \mapsto f(x)$, då är det sedan enkelt att beräkna $f(a)$, f' och $f'(a)$. Öva in det med sinusfunktionen (se ex2, f.f.a. tillägg 1). Skriv in det, kolla *maples* output !

```
>f:=x->sin(2*x);
>f(Pi/3);
>D(f);
>D(f)(Pi/3);
```

- Figurerna kan du förse med en titel (*title* = `...din text...`, obs: fnuttar !), grafen kan du rita noggrannare (*numpoints* = n, $n \in \mathbb{N}$, default är $n = 50$), tjockare (*thickness* = m, $m \in \{0,1,2,3\}$) och med annan färg (*color* = ...), läs ?*plot[options]* !

B. Till uppgifterna

1) a),b) Olikheter kan du lösa med *>solve*, se ex2. Absolutbeloppet skrives *abs*.

c) Ladda in logik-paketet (*>with(logic)*). Operatorerna $+, \cdot, '$ skriver du *&and*, *&or*, *&icke*, med *>bsimp(expr)* förenklar du sedan uttrycket *expr*, du kan också få ditt uttryck på "kanonisk form" (disjunktiv, resp. konjunktiv normal form med *DNF*, resp. *CNF*), se ex1.

d) Fakultet beräknar du med !, binomialkoefficienterna med *binomial* som finns i kombinatorik-paketet (laddas in med *>with(combinat)*). Se ex1. Räkna ut 5! och "7 över tre" för hand och jämför med *maples* svar! Se ex1.

e) Räknar ut sådana uttryck gör du med *expand*, pröva även *simplify* och *normal*. Se ex1.

2) a) Ta numpoints>900 !

b) Att f är jämn kan du ju "räkna ut" (*f(x) - f(-x)* = ...), men t.o.m. det finns i *maple*: *>type(f(x),evenfunc(x));* beräkna höger- och vänstergränsvärdet för att vara säker att gränsvärdet existerar. Vill du kolla om de är lika, kan du göra det snyggt med "Boolesk evaluering": >e*valb(limit(f(x),x=0,left)= limit(f(x),x=0,right));*
$\lim_{x\to\infty} f(x)$ får du med *>limit(f(x), x=infinity).* Men OBS, *maple* svarar fel! Skriv om f först (t.ex. $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^2}}$ för x>0). b4): du måste kolla om $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$ existerar (kolla höger och vänster-gränsvärde)!! 2b5): du kan beräkna f:s största och minsta värde med *>maximize(f(x),x)* resp. *>minimize(f(x),x)*, vill du beräkna det största värde som f antar på [a,b], så skriver du *>maximize(f(x),x,a..b)*, infinity tillåtet men inte π. Men du skall motivera det m.h.a. f' >0, resp <0! Analogt i b6) ! Se ex2. Läs tillägg 1 och tillägg 2 där !

c) Försök! *Maple* hjälper dig (D_f = ? Lös olikheten…). Rita 1:1 (*constrained*).

3) a) Ladda in linjär-algebra-paketet (*>with(linalg)*). En matris A multipliceras med ett tal a med *>scalarmul(A,a)*. Matriser multipliceras med *multiply*, matris-ekvationer löses med *linsolve*. Läs också *>?evalm*. Se ex3.

b) Skalärprodukten beräknas med *dotprod*, vektorprodukten med *crossprod*. Hur du skriver in matriser och vektorer se ex3.

c) Skriv upp alla ekvationer, du behöver inte reducera systemet till 3x3, maple kan lösa överbestämda ekvationssystem också. Och till sist frågas förstås efter $\lim_{R_x\to\infty} I(R_x)$ (dvs. " R_x plockas bort").

LYCKA TILL !

Bernhard