Matematiska Institutionen
CHALMERS & GU

Extrauppgift 4

a) Lös differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$.

b) Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 e^x \sin^2 \frac{x}{2}$.

Repetitionsfrågor

Vad är en linjär differentialekvation? Vad är en linjär operator? Visa att om $P(r)$ är ett polynom med konstanta koefficienter så är $P(D)$ en linjär differentialoperator. Visa att om koefficienterna i $P(D)$ och $Q(D)$ är konstanta så är $P(D)Q(D)y = P(D)Q(D)y$. Formulera och bevisa Heavisides förskjutningsregel. Vad är en homogen och vad är en inhomogen differentialekvation? Vad är det karakteristiska polynomet för en linjär n:te ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter? Visa att om α är en rot till det karakteristiska polynomet $P(r)$ av multiplicitet m så gäller att $Q(x)e^{\alpha x}$ är en partikulärlösning till $P(D)y = 0$, för $Q(x)$ ett polynom av grad < m. Låt det karakteristiska polynomet $P(r)$ ha grad n och låt rötterna vara $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ med multiplicitet $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ där $m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell = n$. Vad är då lösningen till $P(D)y = 0$? Formulera och bevisa en sats om den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen $P(D)y = g(x)$, där $P(D)$ är en linjär differentialoperator. Låt $P(D)$ vara en linjär differentialoperator av n:te ordningen med konstanta koefficienter. Beskriv hur man finner en partikulärlösning y_p till $P(D)y = g(x)$ i det fall då $g(x)$ är

a) ett polynom

b) ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion

c) en produkt av ett polynom, en exponentialfunktion och en sinus/cosinus-funktion.

d) en summa av flera funktioner; $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_m(x)$.

Låt $P(D)$ vara en linjär differentialoperator av n:te ordningen med konstanta koefficienter. Beskriv hur man reducerar detta till att lösa ekvationer av 1:a ordningen. Formulera Eulers differentialekvation och ange en lösningsmetod för den.

Extrauppgifter

- För vilka värden på konstanyen k har det s.k. *randvärdesproblemet* $y'' - 2y' + ky = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ någon lösning som ej är identiskt noll? Vad är lösningarna för dessa k?

  Svar: $k = n^2 + 1$ där n är ett heltal; $y(x) = ae^x \sin nx$.

- Bestäm en lösning till ekvationen $y'' - 5y' + 6y = 3x^2 e^{2x} + 10x \sin x$.

  Svar: $y(x) = -(x^3 + 3x^2 + 6x)e^{2x} + (x+1)\cos x + (x + \frac{2}{5}) \sin x$.