Matematiska Institutionen
CTH & GU

Datorlaboration, Mat. Met. E1, del B, TMA042b, lp II, ht2001

1. Laborationen är ej obligatorisk.
2. Laborationen utförs individuellt, (alltså **ej** som ett samarbete av två eller flera personer.)
3. Laborationen består av fyra uppgifter. Förtjänstfullt utförda lösningar ger bonuspoäng vid tentamen på del B under året, ej senare tentor. Varje uppgift kan ge 1 BP; alltså totalt kan erhållas 4 BP. Du kan starta med laborationerna direkt; en introduktion till *Maple* och `MATLAB` användande har ni fått i kursen Datoranvändning i denna läsperiod.
4. Gå igenom bifogade exempel (på kurshemsidan) som innehåller allt du behöver, (och lite till).
5. Laborationen skall lämnas senast vid sista föreläsningen, on 12/12. Häfta ihop lösningarna till de fyra uppgifterna. Skriv namn och personnummer <u>längst upp på varje inlämnat blad</u>, (se anvisningar nedan), <u>blad utan namn eller personnummer beaktas ej</u>. Skriv bådas namn vid grupparbete. Laborationen lämnas tillbaka med del B-tentan.

Uppgift 1, (differentialekvationer)

Rita fasporträttet $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ till Lorentzsystemet

$$\begin{cases} x' &= 10(y-x), \\ y' &= -xz + 28x - y, \\ z' &= xy - (8/3)z \end{cases} \qquad (x(0), y(0), z(0)) = (0.001, 0, 0),$$

för $0 \leq t \leq 22$; (se avsnitt 9.12 i kursboken).

Uppgift 2, (differentialekvationer)

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= -y - \frac{1}{3}x^3 + x, \\ y' &= 100x, \end{cases} \qquad \text{med} \qquad \begin{cases} (BV)_1: & (x(0), y(0)) &= (-0.5, 3) \\ (BV)_2: & (x(0), y(0)) &= (2.5, 30) \end{cases}$$

Detta problem och dess relation till en elektrisk krets beskrivs lite närmare; se sista sidan nedan och/eller filen **Elkrets** på kurshemsidan. (Det är hämtat från *MathSoft, Inc: Topics in Mathcad, Differential Equations, 1994*.)

a) Rita kurvorna $x = x(t)$, $0 \leq t \leq 7$, för $(BV)_1$ och $(BV)_2$ i ett diagram, ('strömmen').

b) Rita kurvorna $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 7$, för $(BV)_1$ och $(BV)_2$ i ett diagram, ('spänningen').

c) Rita i samma diagram riktningsfältet och lösningskurvorna $(x(t), y(t))$, i.e. 'fasporträtten', för $(BV)_1$ och $(BV)_2$.

Du har här löst en 'Liénard'-differentialekvation; ett viktigt specialfall är 'van der Pol's ekvation'. (Se övn 9:41 i kursboken.)

Uppgift 3, (differentialekvationer, matlab)

I denna uppgift får ni en liten försmak av att använda `MATLAB` för numeriska beräkningar. `MATLAB` 'ligger något närmare maskinen' än *Maple* som ni prövat tidigare. I kursen i numerisk analys i E2 kommer ni att köra mycket på matrisproblem; det är då `MATLAB` riktigt kommer till nytta; (se nästa uppgift, uppgift 4, där vi dock använder oss av *Maple*). I denna kurs håller vi oss till problem i en variabel för `MATLAB`. Vi börjar med tre enkla uppgifter för att vänja oss vid `MATLAB`.

1) Rita (med `MATLAB`) kurvan $y = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2}\cosh(\sin \pi x)$, för $1 \leq x \leq e$.

2) Beräkna (med `MATLAB`) integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2}\, dx$.

3) Beräkna $\int_1^e (\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2}\cosh(\sin \pi x))\, dx$ med `MATLAB`.

Härnäst studerar vi *Keplers ekvation* från den celesta mekaniken,

$$M = E - e\sin(E),$$

som ger ett samband mellan medelanomalin M och den excentriska anomalin E hos en elliptisk bana med excentriciteten e. Vi antar att vi känner e, som ligger i intervallet $0 < e < 1$, och vill bestämma E så att M antar ett givet värde. Det blir alltså en icke-linjär ekvation i en variabel.

a) Plotta ut ett par lämpliga kurvor över ett intervall i E och se efter hur många lösningar det kan vara.

b) Det ligger nära till hands att lösa ut E och göra en fixpunktsiteration med

$$g(E) = M + e\sin E.$$

Visa att denna är konvergent. (Så här gör man ofta i praktiken; görs det förståndigt så fungerar det, men långsamt.)

c) Kör några steg med denna fixpunktsiteration för $M = 1$, $e = 0.5$ och en lämplig startgissning på E. (Du behöver inte göra en färdig subrutin i `MATLAB`, det räcker att du har ett programstycke som gör en iteration.) Hur snabbt avtar felet? Vad är förhållandet mellan felet i lösningen och absolutbeloppet av funktionsvärdet? I praktiken brukar man följa skillnaden mellan successiva iterander. Hur bra går det i detta fall?

d) Gör några steg med en Newtoniteration för samma problem. Konvegerar den fortare? Kan man starta den var som helst?

e) Jämför så resultatet av att använda `MATLAB`:s inbyggda rutin **fzero**. Använd dess parameter **trace** för att få ut en rapport om vad som händer i varje steg.

Uppgift 4, (analytisk geometri)

a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna AB, BA, $\det A$ och A^{-1}. Lös matrisekvationen $AX = B$ och ekvationssystemet $AX = 18D$.

b) Låt $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Beräkna $a \cdot b$, $a \times b$ och $[a, b, c] = a \cdot (b \times c)$.

c) I figuren nedan, (sid 4), visas en resistansbrygga som är kopplad till en spänningskälla med spänningen $E = 100V$. I bryggan finns ett mätinstrument inkopplat. Vi vill bestämma strömmen genom detta som funktion av den variabla resistansen R_x i intervallet $10 \leq R_x \leq 40$. För varje R_x-värde får vi ett linjärt ekvationssystem att lösa. Detta sätts upp genom slinganalys m.h.a. Ohms lag, (spänningsfallet V över en resistans R p.gr.a. strömmen I ges av $V = RI$), och Kirchhoffs lag, (spänningsfallet runt en slinga är noll). Det blir bara fyra element i 3×3-matrisen som beror på R_x. Bestäm strömmen genom instrumentet som funktion av R_x. Rita sedan denna funktion för $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 5\Omega$ och $R_5 = 10\Omega$. Kolla att du satt upp rätt ekvationssystem genom att ta med en extra slinga, (du får då ett överbestämt ekvationssystem). Vad händer då R_x väljs större och större?

Anvisningar

A. Allmänt

1. Gå igenom bifogade exempel (på kurshemsidan) som innehåller allt du behöver, (och lite till).

2. De två första och den sista, 4:e, uppgiften ska göras i Maple (eller Mathematica) och den tredje uppgiften ska göras i Matlab.

3. Lämna in hela ditt 'worksheet', alltså <u>alla kommandon!</u> Skriv namn och personnummer med *Maple* dels **överst på första bladet** och dels **i början av varje uppgift.** Häfta ihop alla blad. **OBS:** För uppgift 3 b) kan du lämna in handskriven lösning. Alla lösningar/resultat skall kommenteras, (gärna för hand).

4. Förbered dig noggrant innan du sätter dig vid datorn, (gula boken, laborationerna från datorintroduktionen, repetera labben till del A). Läs anvisningarna nedan och gå igenom exemplen (finns på kurshemsidan); där finns allt du behöver och lite till. Är du osäker på ngt, läs den utförliga online-hjälpen. I *Maple* kan du skriva **?plot**, **?plots**, **?solve** etc. och t.o.m. även **??**. Du kan också trycka **ctrl-F1** för att få online-hjälp för det ord som makören står på eller ordet precis efter. I `MATLAB` skriver du **help fzero** etc, eller (ännu bättre) **helpdesk** för att få en hypertext-version. En bra handledning till `MATLAB` kan du hämta på nätet: `http//www.math.chalmers.se/~jorgen` producerad av Jörgen Löfström.

5. För `MATLAB`-uppgiften är det smidigaste att skriva s.k. m-filer, som innehåller dina kommandon. Du editerar då först dessa med en editor, (ett bra val är `MATLAB`:s inbyggda editor som du startar med **edit** från `MATLAB`), och kör sedan hela m-filen från `MATLAB` genom att skriva dess namn. Exempel: **fixpunkt.m** körs med kommandot **fixpunkt**. För att redovisa så skriver du ut dina m-filer. Dessutom behöver du redovisa vad de ger för utdata. Detta gör du genom att använda kommandot **diary** *filnamn* (resp. **diary off**) som gör att allt du och `MATLAB` skriver på skärmen även hamnar i en fil som du sedan kan skriva ut. Figurer skriver du ut (med **print**) och lämnar på separat blad; **glöm inte att skriva namn och personnummer**. Om du kör `MATLAB` hemma på PC kan du använda s.k. *notebooks*, som är `MATLAB`:s motsvarighet till *Maple*:s worksheets. Det fungerar så att man kör `MATLAB` via Microsoft Word, som man också måste ha installerat på sin dator. `MATLAB` finns med på Chalmers Start-CD, som man kan köpa på Cremona. Notebooks finns tyvärr inte i Unix-versionen av `MATLAB`.

B. Till uppgifterna

1. Det vanligaste är att lösa en differentialekvation med **dsolve** för explicita lösningar, och med **dsolve(numeric)** för numerisk beräkning och ritning med **odeplot**, (ange begynnelsevillkor, ladda in **plots**). *Maple* ger eventuellt ett overflow-meddelande. Då är det bäst att plotta lösningskurvorna med **plot** om *Maple* hittar en explicit lösning, eller direkt (bäst, enklast?) med **DEplot** som måste laddas in med **with(DEtools)**; då kan du öka **iterations** från default som är 1 till, välj, 3 och minska **stepsize**, välj 0.02. Dessutom kan du rita riktningsfält. Se exempel på kurshemsidan. **OBS:** Begynnelsevillkoren och variablerna kan skrivas in som mängder eller listor, (i det senare fallet beaktas ordningen: 1:a-2:a variabeln). 3-dimensionella plottar kan använda **DEplot3d**. Se exempel på kurshemsidan. **OBS:** Välj **numpoints** > 2000.

vgv.

2. Det finns olika sätt att få lösningar till ett sådant system ('Van der Pol Limit Cycle'), se exempel på kurshemsidan som löser liknande 'van der Pol'- och 'Volterra-Lotka'-ekvationer. Riktningsfält med lösningskurvor fås även med **phaseportrait**, enbart riktningsfältet med **dfieldplot**. Behöver du mer och utförligare information, läs **?DEplot**, **?DEtools**, **?DEtools[options]**, **?phaseportrait** och **?dfieldplot**. Välj lagom **stepsize** och **numpoints** så att lösningskurvorna inte ser kantiga ut.

3. För allmän information om `MATLAB`, se gula boken och/eller ovan nämnda handledning av Jörgen Löfström. Du ritar flera kurvor i samma program med **hold on** som stängs av med **hold off**. Numerisk beräkning av bestämda integraler görs med **quad**, men funktionen som du vill integrera måste först skrivas in som en 'funktionsfil', se exemplen på kurshemsidan. Lättaste sättet att plotta kurvor i `MATLAB` är **ezplot**, se **help ezplot**. Ett exempel på hur ett enkelt `MATLAB`-program för Newtoniteration kan se ut finner du i kursboken, avsnitt 7:14. Det går bra att lägga in de aktuella funktionerna direkt i programmet. Vill du vara lite mer ambitiös kan du definiera funktionerna separat (genom att skriva en m-fil **F.m** eller genom att skapa inline-funktioner med **F=inline('...')**). Modifikationen till fixpunktsiteration bör inte vara alltför svår. Du behöver dessutom modifiera programmen för att skriva ut felet m.m. vilket enklast görs genom en tilldelning **felet=...** utan semikolon på slutet. Det går också att använda **disp**. Till **fzero** kan du ge funktionen vars nollställe skall sökas som en sträng om du kallar den obekanta **x**, annars måste du definiera en funktion (med **inline** eller som m-fil). Se **help fzero** för exempel. Där framgår även hur parametern **trace** används.

4. **a)** Ladda in linjär algebra paketet, **with(linalg)**. En matris A multipliceras med ett tal a med **scalarmul(A,a)**. Matriser multipliceras med **multiply**, matrisekvationer löses med **linsolve**. Läs också **?evalm**. Se exempel. **b)** Skalärprodukten beräknas med **dotprod**, vektorprodukten med **crossprod**. Se exempel för att se hur du skriver in matriser och vektorer. **c)** Skriv upp alla ekvationer. Du behöver inte reducera systemet till 3×3, *Maple* kan lösa överbestämda ekvationssystem också. Till sist frågas förstås efter $\lim_{R_x \to \infty} I(R_x)$, (dvs ¨$R_x$ plockas bort¨).

Figur till Uppgift 4c: