Ex 6.96 S

Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Lösning: Vi skriver integralen som $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$ så att $2x$ är inre derivata, dvs $2x/(1+x^2)^2$ har primitiv funktion $-1/(1+x^2)$. Vi finner nu genom Partial Integration en primitiv funktion till integranden. Observera att vi **inte** gör partialintegration av den bestämda (generaliserade) integralen. Att integralen är generaliserad beror på att 1) vi har ett obegränsat intervall (upp till ∞) och 2) integranden är inte kontinuerlig (inte ens definierad) i vänstra intervalländpunkten 0. Vi får $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}([(-\frac{1}{1+x^2})\ln x] + \int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{x}\,dx$. Partialbråksuppdelning ger: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2+1+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$ där A har bestämts till 1 genom handpåläggning. Identifikation av koefficienterna av de två uttrycken i täljarna innebär att $1+B=0$, $C=0$, dvs $B=-1$, $C=0$. Alltså är $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$ så $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$. Från detta fås att $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{1+x^2}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)) + C$. Vi erhåller nu att $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}[-\frac{1}{1+x^2}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^\infty = \frac{1}{2}(\lim_{x\nearrow\infty}(-\frac{1}{1+x^2}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)) - \lim_{x\searrow 0}(-\frac{1}{1+x^2}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1))) = \frac{1}{2}(0 + \lim_{x\nearrow\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \lim_{x\searrow 0}((1-\frac{1}{1+x^2})\ln x) + 0) = \frac{1}{2}(0 + \lim_{x\searrow 0}\frac{x^2\ln x}{1+x^2}) = -\frac{1}{2}\lim_{x\searrow 0} x^2\ln x = 0$. Observera att vi har slagit ihop olika termer i uttrycket $(-\frac{1}{1+x^2}\ln x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1))$, beroende på vilket gränsvärde vi beaktar, $x\to\infty$ eller $x\to 0$. Hade vi beräknat den bestämda integralen med partialintegration hade denna möjlighet gått förlorad om vi hade gått i gräns redan direkt efter partialintegrationen.
En i detta fall elegantare lösning baserad på ett 'trick' kan fås genom substitutionen $t = 1/x$ som är oproblematisk då vi ju ser direkt att integralen är konvergent. Om vi betecknar den i uppgiften givna integralen med I så ger den nyss nämnda substitutionen att $I = -I$, dvs $2I = 0$.

Ex 6.97e Konvegerar integralen $I = \int_0^\infty x^5\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$?

Denna integral är generaliserad endast beroende på att det är ett obegr. integrationsintervall. Vi vet att $\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{e^{x/2}} = 0$ så det $\exists x_0 > 0$ s.a. $\left|\frac{x^{(5+\frac{1}{2})}}{e^{x/2}}\right| \le 1$, $\forall x > x_0$. Nu gäller att

$$I = \int_0^{x_0} x^5\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx + \int_{x_0}^\infty x^5\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$$

där den första integralen är icke-generaliserad och därmed konvergent. För den andra integralen noterar vi att vi har

$$(*) \qquad 0 \le x^5\sqrt{x}\,e^{-x} = \left|\frac{x^5\sqrt{x}}{e^{x/2}}\right|\frac{1}{e^{x/2}} \le \frac{1}{e^{x/2}} \quad \text{för } 0 < x_0 < x$$

Då $\int_{x_0}^\infty e^{-x/2}\,dx$ är konv., ty $\int_{x_0}^\infty e^{-x/2}\,dx = -2\left[e^{-x/2}\right]_{x_0}^\infty = -2(\lim_{x\to\infty} e^{-x/2} - e^{-x_0/2}) = 2e^{-x_0/2}$, så får vi från (*), enl. Jämf. kriteriet, att också $\int_{x_0}^\infty x^5\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$ är konv.

$\therefore$ I konvergent.