Mat. Met. E1 del B, TMA042b 2000-12-15

1. $z^2+2(1-i)z+6i=0 \Leftrightarrow (z+(1-i))^2-(1-i)^2+6i=0 \Leftrightarrow (z+(1-i))^2-(1-1-2i)+6i=0 \Leftrightarrow$ $(z+(1-i))^2=-8i$. Sätt $z+(1-i)=x+iy$. $\therefore x^2-y^2+2ixy=(x+iy)^2=(z+(1-i))^2=-8i$. Också $x^2+y^2=|x+iy|^2=|(x+iy)^2|=|(z+(1-i))^2|=|-8i|=8 \therefore \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-8 \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right. \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow$ $x=\pm 2 \Rightarrow y=\mp 2 \therefore z+1-i=\left\{\begin{array}{l} 2-2i \\ -2+2i \end{array}\right. \Rightarrow z_i=\left\{\begin{array}{l} 2-2i-1+i \\ -2+2i-1+i \end{array}\right. =\left\{\begin{array}{l} 1-i \\ -3+3i \end{array}\right.$

---

2. $(x^2+x)y'=x-y+1 \Leftrightarrow y'+\dfrac{y}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}$. Vidare: $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}dx=(PB)=\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}dx=$ $\ln x-\ln(x+1)=\ln\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow$ I.F. $=e^{\int\frac{dx}{x(x+1)}}=e^{\ln\frac{x}{x+1}}=\dfrac{x}{x+1} \therefore \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{x}{x+1}y\Big)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow$ $\dfrac{x}{x+1}y=\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx+C_1,\ C_1,\in\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{x}{x+1}y=\ln(x+1)+C_1 \Rightarrow$ $y=(1+\dfrac{1}{x})(\ln(x+1)+C_1)$

3.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \hookleftarrow & \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} =\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$=(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2(-1-1)=-4\neq 0 \Rightarrow A$ inverterbar för alla $a\in\mathbb{R}$. För $a=1$ beräknas A^{-1} med Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \hookleftarrow & \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \hookleftarrow \\ \hookleftarrow & \\ & \boxed{1} \\ \boxed{-1} & \end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

---

4. Sätt $p=y' \Rightarrow y''=\dfrac{d}{dx}(y')=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy},\ p=p(y)$. Vi får $yy''=2(y')^2 \Leftrightarrow yp\frac{dp}{dy}=2p^2 \Leftrightarrow$ $\frac{dp}{dy}=\frac{2p}{y}$ om $p,y\neq 0$. Så separabel ekv. så $\dfrac{dp}{p}=2\dfrac{dy}{y}$ om $p,y\neq 0$. Det ger $\ln|p|=2\ln(y)+\ln C_1,\ C_1>$ $0 \Leftrightarrow |p|=C_1y^2 \Leftrightarrow p=\pm C_1y^2=C_2y^2, C_2\neq 0 \therefore y'=p=C_2y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2}=C_2dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y}=C_2x+C_3,\ C_2\neq$

0, $C_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{C_2x+C_3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{ax+b}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ under förutsättning att $y \neq 0$ och $y' \neq 0$ dvs $y \neq$ konst. Om $y =$ konst. $\neq 0$ fås denna singulära lösning som den allmänna lösningen med $a = 0 \therefore y = \dfrac{1}{ax+b} \quad a, b \in \mathbb{R}$ och singulär lösn. $y \equiv 0$.

5. Systemet $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (D-3)y+(D-1)z = x \\ (D^2-1)y-(D+1)z = x+y \end{array}\right. \quad \boxed{(D-1)} \quad \overset{\boxed{(D+1)}}{\hookleftarrow} \qquad \Longrightarrow$

   $((D+1)(D-3)+(D-1)(D^2-1))y = (D+1)x+(D-1)(x+y) \Leftrightarrow (D^3-3D-2)y = -2$ vars kar. ekv. är $r^3-3r-2=0 \Leftrightarrow r_{1,2} = -1, r_3 = 2 \therefore y_h = (Ax+B)e^{-x}+Ce^{2x}$. För y_p ansätt $y_p = a \Rightarrow a = 1 \therefore y = y_p+y_n = 1+(Ax+B)e^{-x}+Ce^{2x}$. Insättning i 2:a ekv. $\Rightarrow z'+z = y''-y-x-4 = -2Ae^{-x}+3Ce^{2x}-x-5$. Int. faktor: $e^{\int dx} = e^x \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(e^xz) = -2A+3Ce^{3x}-(x+5)e^x \Leftrightarrow e^xz = -2Ax+Ce^{3x}-(x+4)e^x+C_1 \Leftrightarrow z = (C_1-2Ax)e^{-x}+Ce^{2x}-x-4$. Här är $A, B, C, C_1 \in \mathbb{R}$ och y och z uppfyller 2:a ekv. Insättning i 1:a ekv $\Rightarrow C_1 = -\dfrac{A}{2} - 2B \therefore \left\{\begin{array}{l} y = 1+(Ax+B)e^{-x}+Ce^{2x} \\ z = -x-4-(2Ax+\frac{A}{2}+2B)e^{-x}+Ce^{2x} \end{array}\right.$

6. En skärningslinje för planen är ju en skärningslinje också för tre av planen t.ex. π_1, π_2, π_3. Lös alltså $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$. För att få en lösnings*linje* måste det finnas oändligt många lösningar så det är nödvändigt (men möjligen inte tillräckligt) att $0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & a-2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a-3 \\ a-2 & -2 \end{vmatrix} = 2-(a-3)(a-2) = -(a^2-5a+4) = -(a-1)(a-4)$.

   Lösning för $a = 1$:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

   $$(\dagger) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Lösning för $a = 4$:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Insättning av dessa lösningar, linjer, i π_4 ger för $a = 4$: $2(1-5t)+4t+3t = 2-3t \neq 2$ då $t \neq 0$; för $a = 1$: $2(1+t)+(-2t)+0 = 2, \ \forall t$. $\therefore$ Endast $a = 1$ ger en skärningslinje för alla planen och linjen är som getts ovan i $(\dagger)$.