Mat. Met. E1 del B, TMA042b 2001-04-19

1. $z-(3+2i)=-\dfrac{5+i}{z} \Leftrightarrow z^2-(3+2i)z+5+i=0 \Leftrightarrow \Big(z-\dfrac{3+2i}{2}\Big)^2+5+i-\Big(\dfrac{3+2i}{2}\Big)^2=0 \Leftrightarrow$ $\Big(z-\dfrac{3+2i}{2})^2+\dfrac{15}{4}-2i=0$. Sätt $w=x+iy \Rightarrow w^2=-\dfrac{15}{4}+2i$ så $x^2-y^2+2ixy=-\dfrac{15}{4}+2i$ och $x^2+y^2=|w|^2=|w^2|=\Big|-\dfrac{15}{4}+2i\Big|=\dfrac{17}{4}$ $\therefore \begin{cases} x^2-y^2=-\frac{15}{4} \\ 2xy=2 \\ x^2+y^2=\frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2},\ y=\pm 2 \Rightarrow$
$z-\dfrac{3+2i}{2}=\begin{cases} \frac{1}{2}+2i \\ -\frac{1}{2}-2i \end{cases} \Rightarrow \underline{z_1=2+3i} \quad \underline{z_2=1-i}$

---

2. Låt $P_1=(2,1,3)$ och $P_2=(4,5,7)$. Då är $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(4,5,7)-(2,1,3)=2(1,2,2)$ så en riktningsvektor för linjen ℓ är $v=(1,2,2)$ och linjens ekvation på parameterform är $(x,y,z)=(2,1,3)+t(1,2,2),\ t\in\mathbb{R}$. Insättning i planets ekv. $\Rightarrow 2+t-(1+2t)+2(3+2t)=4 \Rightarrow t=-1 \therefore$ $P=(2,1,3)+(-1)(1,2,2)=(1,-1,1)$. Nu är $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2,0,1)-(1,-1,1)=(1,1,0)$.
En vektor ortogonal mot v och $\overrightarrow{PQ}$ är $v\times\overrightarrow{PQ}==\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2e_1+2e_2-e_3$
$\therefore$ Normaler till det sökta planet är $\pm(-2,2,-1)$ och normering ger $\underline{\pm\frac{1}{3}(2,-2,1)}$.

---

3. $y'+2(e^x+e^{x-y})=e^{2x}y' \Leftrightarrow 2e^x(1+e^{-y})=(e^{2x}-1)y'$, separabel $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{2e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{1}{1+e^{-y}}dy$.
Nu är $\displaystyle\int\frac{2e^x}{e^{2x}-1}dx=\begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx \end{bmatrix}=\int\frac{2}{t^2-1}dt=[PB]=\int\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt=\ln|t-1|-$ $\ln|t+1|+C_1=\ln\Big|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\Big|+C_1$ och $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^{-y}}dy=\int\frac{e^y}{e^y+1}2y=\ln(e^y+1)+C_2$,
$\therefore \ln\Big|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\Big|=\ln(e^y+1)+\ln C \Rightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=C(e^y+1),\ x\ge\ln 2$ och $x=\ln 2 \Rightarrow \dfrac{1}{3}=C\dfrac{4}{3} \Rightarrow$
$C=1/4 \Rightarrow y=\ln\Big(-1+4\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\Big),\ x\ge\ln 2.$

---

4. Gauss-Jordan ger: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \boxed{-1} & \boxed{-2} \\ & \hookleftarrow \\ \hookleftarrow & \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \hookleftarrow \\ \boxed{2} \end{array}$
$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \hookleftarrow \\ \boxed{-1} \end{array}$
$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \hookleftarrow & \hookleftarrow \\ & \boxed{-2} \\ \boxed{-3} & \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$
$A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (Koll: $AA^{-1}=A^{-1}A=\ldots=E$). Vi får $A(XB+2X)=$

$A(XB + X2E) = AX(B + 2E)$. Nu är $B + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ och $(B + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\therefore X = A^{-1}C(B + 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

---

5. Ekv. $\Leftrightarrow x^2y'' + xy' + y = x\sin(\ln x)$, $x \geq 0$ (ty annars ej $\ln x$ def.) och detta är en Euler så inför ny variabel t där $0 < x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ $\therefore x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $x^2y'' = x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$. Insättning ger i variabeln t att: $y'' - y' + y' + y = e^t\sin t \Leftrightarrow (D^2 + 1)y = e^t\sin t$, ekv. konst. koeff. $\Rightarrow$ Kar ekv: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \Rightarrow y_h = C_1e^{-it} + C_2e^{it} = A\cos t + B\sin t$. Ansätt för hjälpekv. $(D^2 + 1)y = e^{(1+i)t}$ att $w = ze^{(1+i)t} \Rightarrow$ (enl. Heaviside) $\Rightarrow e^{(1+i)t} = (D^2 + 1)w = (D^2 + 1)ze^{(1+i)t} = e^{(1+i)t}((D + 1 + i)^2 + 1)z \Rightarrow (D^2 + 2(1 + i)D + ((1 + i)^2 + 1))z = 1$. Ansätt $z = C_1$ konst $\Rightarrow ((1 + i)^2 + 1)C = 1 \Rightarrow C = 1/1 + 2i = \frac{1 - 2i}{5}$ $\therefore w = \frac{1 - 2i}{5}e^{(1+i)t}$ och $e^t\sin t = \text{Im}(e^{(1+i)t}) = \text{Im}((D^2+1)w) = (D^2+1)(\text{Im}(w))$ ger att $y_p = \text{Im}(w) = \frac{(\sin t - 2\cos t)}{5}e^t$ $\therefore$ Allmän lösn.: $y = y_p + y_h = A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x) + \frac{(\sin(\ln x) - 2\cos(\ln x))x}{5} = \left(A - \frac{2x}{5}\right)\cos(\ln x) + \left(B + \frac{x}{5}\right)\sin(\ln x)$

---

6. Vi noterar att $y'' + (1 - x)y' - xy = D^2y + Dy - xDy - xy = (D + 1)Dy - x(Dy + y) = (D + 1)Dy - x(D + 1)y = D(D + 1)y - x(D + 1)y = (D - x)(D + 1)y$ så ekv. syst. kan skrivas efter denna faktorisering av diff. operatorn ovan, som

$$\begin{cases} (D - x)(D + 1)y + z = -xe^x \\ (D + 1)y + z = 0 \end{cases} \quad \underset{\boxed{-(D-x)}}{\longleftrightarrow} \quad \overset{RE}{\sim} \begin{cases} (D - (1 + x))z = xe^x \\ (D + 1)y + z = 0 \end{cases}$$

$(D - (1 + x))z = xe^x$ är 1:a ordn. linjär med $IF : e^{-(x+\frac{x^2}{2})} \Rightarrow e^{-(x+\frac{x^2}{2})}z = \int xe^xe^{-(x+\frac{x^2}{2})}dx + C = \int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + C = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C \Rightarrow z = -e^x + Ce^{x+\frac{x^2}{2}}$ och $-1 = z(0) = -1 + C \Rightarrow C = 0 \therefore z = -e^x$. Lösning av 2:a ekv. ger $(D + 1)y - e^x = 0$. IF: $e^x \Rightarrow e^xy = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$ och $\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \therefore y = \frac{1}{2}e^x$.

Notera. Man kan ju också direkt lösa ut z ur andra ekv. och sätta in i första och man får då en ekv. för enbart y som ju kan lösas med faktoriseringen ovan.
