1. $p(z) = z^4 - z^3 - 2z^2 + 3z - 3 = 0$. Reella koefficient i $p(z)$ ger att då $z_1 = (1+i\sqrt{3})/2$ är en rot så är också $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ en rot. Då har $p(z)$ faktor $(z-z_1)(z-z_2) = (z - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(z - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}) = (z-\dfrac{1}{2})^2 - (\dfrac{i\sqrt{3}}{2})^2 = (z-\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} = z^2 - z + 1$. Division $\Rightarrow p(z) = (z^2-z+1)(z^2-3) = 0 \Rightarrow z_{3,4} = \pm\sqrt{3}$

---

2. a) π har normalvektor $n_{\pi_1} = (1,2,1)$ och $n_{\pi_2} = (3,-2,1)$. Nu är $n_{\pi_1} \cdot n_{\pi_2} = 3 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow n_{\pi_1} \perp n_{\pi_2} \Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2$.

   b) π_3 har normalvektor $n_{\pi_3} \perp n_{\pi_2}$ och $n_{\pi_3} \perp n_{\pi_1}$. En vektor i $\mathbb{R}^3$ som är vinkelrät mot två givna vektorer u och v fås av $u \times v$ så n_{π_3} är parallell med $n_{\pi_1} \times n_{\pi_2} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4,2,-8)$ så tag t.ex. $n_{\pi_3} = (2,1,-4)$. Planet π_3 ges då av $\pi_3 : 2\cdot(x-1) + 1\cdot(y-(-2)) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4z = 0$

   c) Lös $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \boxed{-3} & \boxed{-2} \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array}$

   $\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & 2 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2/3 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 4/3 \end{array}\right) \Rightarrow$

   $y = -4/21, z = -1 + \frac{16}{21} = -\frac{5}{21}, x = -1 + \frac{5}{21} + \frac{8}{21} = \frac{-8}{21}$ så skärningspunkten är $-\frac{1}{21}(8,4,5)$.

---

3. $x^3y' = 4\ln x - 2x^2y \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{4\ln x}{x^3}$, linjär. $\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| = \ln x^2 \Rightarrow$ Int. faktor : $e^{\ln x^2} = x^2 \quad \therefore \frac{d}{dx}(x^2y) = 4\frac{\ln x}{x} \Rightarrow x^2y = 4\int \frac{\ln x}{x}dx + C_0,\ C_0 \in \mathbb{R}$. Nu är $\int \frac{\ln x}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = t^2/2 + C_1 \quad \therefore x^2y = 2(\ln x)^2 + C \Rightarrow y = (2(\ln x)^2 + C)/x^2$.

---

4. A inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-2a & a & 2-a & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 3-2a & a-1 & 2-a & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{-1} & \uparrow \\ \uparrow & \boxed{-2} & \end{array}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-2a & 2-a & -1 \\ a+2 & a-1 & 3 \\ 3-2a & 2-a & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \\ \hookleftarrow \end{array} = -\begin{vmatrix} 1-2a & 2-a & -1 \\ a+2 & a-1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2-2a & 2-a & -1 \\ a-1 & a-1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \boxed{-1} \end{array}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2-2a & 2-a \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix} = -2(1-a)\begin{vmatrix} 2 & 2-a \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{2} \end{matrix} = -2(1-a)\begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = 2a(a-1)$$

$\therefore$ A inverterbar för $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

---

5. Kar. ekv.: $r^2+2r+2=0 \Leftrightarrow (r-(-1+i))(r-(-1-i))=0 \Rightarrow y_h = C_1e^{(-1+i)x}+C_2e^{(-1-i)x} = e^{-x}(A\sin x + B\cos x)$. För att finna y_p notera att $\mathrm{Im}\,(xe^{ix}) = x\sin x$. Lös därför hjälpekv. $(D^2+2D+2)y = y''+2y'+2y = xe^{ix}$. Ansätt $v_p = ze^{ix}$ och Heavisides förskjutningsregel $\Rightarrow$ $e^{ix}((D+i)^2+2(D+i)+2)z = (D^2+2D+2)(ze^{ix}) = xe^{ix}$ $\therefore (D^2+2(1+i)D+1+2i)z = x$. Ansätt $z = ax+b$. Insättning i ekv. $\Rightarrow 2(1+i)a+(1+2i)ax+(1+2i)b = x \Rightarrow a = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5}(1-2i), b = \frac{2}{25}(-1+7i)$ $\therefore v_p = \frac{1}{25}((5-10i)x+14i-2)e^{ix}$ så $y_p = \mathrm{Im}\,(v_p) = \frac{1}{25}((14-10x)\cos x+(5x-2)\sin x)$. Allmän lösn. är $y = y_h+y_p = e^{-x}(A\sin x+B\cos x)+\frac{1}{25}((14-10x)\cos x+(5x-2)\sin x)$.

---

6. Vi ser att $y''-(1+\frac{1}{x})y'+\frac{1}{x}y = (D^2-D-\frac{1}{x}D+\frac{1}{x})y = (D(D-1)-\frac{1}{x}(D-1))y = (D-\frac{1}{x})(D-1)y$. Sätt $w = (D-1)y$ och lös $(D-\frac{1}{x})w = x$ som är linj. med $\int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x| = \ln|x|^{-1}$ och int. faktor $e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|}$. Detta ger $\frac{d}{dx}(\frac{1}{|x|}w) = \frac{x}{|x|} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}w) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}w = x+C_1 \Rightarrow (D-1)y = w = x^2+C_1x$ som är linjär med $\int -1dx = -x$ och int. faktor e^{-x}. Detta ger $\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}(x^2+C_1x)$ så $e^{-x}y = \int e^{-x}(x^2+C_1x)dx + C_2 = [PI] = -(x^2+C_1x)e^{-x}+\int(2x+C_1)e^{-x}dx+C_2 = [PI] = -(x^2+C_1x)e^{-x}-(2x+C_1)e^{-x}+\int 2e^{-x}dx+C_2 = -(x^2+C_1x)e^{-x}-(2x+C_1)e^{-x}-2e^{-x}+C_2 = -(x^2+(C_1+2)x+C_1+2)e^{-x}+C_2$ $\therefore y = -(x^2+Ax+A)+Be^x$ där A, B konstanter.