1. Ekv. syst. kan skrivas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \boxed{-2} & \boxed{-3} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 0 & -11 & 13 & 5-2b \\ 0 & -22 & 18+a & 2-3b \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ \boxed{-2} & \boxed{-1} \\ \leftarrow & \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & b \\ 0 & 11 & -13 & 2b-5 \\ 0 & 0 & a-8 & b-8 \end{array}\right)$ Om $a \neq 8$ är $a-8$ i tredje raden ett pivotelement och systemet har entydig lösning för varje b. Om $a = 8$ så är sista raden $b - 8 = 0x + 0y + (a-8)z = 0$, så om $b \neq 8$ så finns ingen lösning. Om $a = b = 8$ så får vi $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 11 & -13 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{11} \leftarrow \\ \boxed{-7} \\ \end{array} \overset{RE}{\sim}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 25 & 11 \\ 0 & 11 & -13 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, så z fri variabel $\Rightarrow$ sätt $z = t \in \mathbb{R}$ vilket ger $y = (11+13t)/11$; $x = 1 - \frac{25}{11}t$ som lösning för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$, dvs oändligt många lösn.

---

2. Kar. ekv: $0 = r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$ så $y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}$. Det gäller att $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}) \Rightarrow 10x \sin x = \mathrm{Im}(10xe^{ix})$. Finn part. lösn. w till hjälpekv. $(D^2 - 5D + 6)w = 10xe^{ix}$. Ansätt $w = ze^{ix} \Rightarrow e^{ix}((D+i)^2 - 5(D+i) + 6)z = \text{(Heaviside)} = (D^2 - 5D + 6)w = 10xe^{ix} \therefore (D^2 + (2i-5)D + 5 - 5i)z = ((D+i)^2 - 5(D+i)) + 6)z = 10x$. Ansätt $z = ax + b \Rightarrow z' = a,\ z'' = 0 \therefore (2i-5)a + (5-5i)(ax+b) = 10x$. Ident. av koeff. $\Rightarrow \begin{cases} (5-5i)a = 10 \Rightarrow a = 2/1 - i = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i \\ (5-5i)b + (2i-5)a = 0 \end{cases}$ $b = \dfrac{(5-2i)a}{5-5i} = \dfrac{(5-2i)(1+i)}{5(1-i)} = \dfrac{(7+3i)}{5(1-i)} = \dfrac{(7+3i)(1+i)}{10} = i + \dfrac{2}{5} \therefore z = (1+i)x + \dfrac{2}{5} + i \Rightarrow w = ((1+i)x + \dfrac{2}{5} + i)e^{ix} \Rightarrow y_p = \mathrm{Im} w = \mathrm{Im}((1+i)x\cos x + (\dfrac{2}{5} + i)\cos x + (1+i)xi \sin x + (\dfrac{2}{5} + i)i \sin x) = (x+1)\cos x + (x + \dfrac{2}{5})\sin x$

$\therefore$ Allmän lösn. till ekv. är $y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{3x} + (x+1)\cos x + (x + \frac{2}{5})\sin x$

---

3. $x^2y' - 2xy = 3y^a \Leftrightarrow (*)\ y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3}{x^2}y^a$. Vi ser att om $a > 0$ så är $y \equiv 0$ en lösning. Sätt nu $z = y^{1-a}$ ty för $a \neq 1$, $(*) \Leftrightarrow y^{-a}y' - \dfrac{2}{x}y^{1-a} = \dfrac{3}{x^2}$ och $z' = (1-a)y^{-a}y' \Rightarrow z' - \frac{2(1-a)}{x}z = \frac{3(1-a)}{x^2}$. $IF: e^{\int \frac{-2(1-a)}{x}dx} = e^{-2(1-a)\ln|x|} = x^{-2(1-a)} \therefore \dfrac{d}{dx}(x^{-2(1-a)}z) = \dfrac{3(1-a)x^{-2(1-a)}}{x^2} = 3(1-a)x^{2a-4} \Leftrightarrow$ $(**)\ x^{-2(1-a)}z = 3(1-a)\displaystyle\int x^{2a-4}dx + C_1 = \dfrac{3(1-a)}{2a-3}x^{2a-3} + C_1$ om $2a - 3 \neq 0$. $\therefore (x^2y)^{1-a} = \dfrac{3(1-a)}{2a-3}x^{2a-3} + C_1 \Leftrightarrow y^{1-a} = \dfrac{3(1-a)}{2a-3}\dfrac{1}{x} + C_1x^{2(1-a)}$, $2a - 3 \neq 0$. Om $2a - 3 = 0$ ($\Leftrightarrow a = 3/2$) ger $(**)$ att $x^{-2(-\frac{1}{2})}z = 3(-\dfrac{1}{2})\displaystyle\int x^{-1}dx + C_2 = -\dfrac{3}{2}(\ln|x| + C_3) \Leftrightarrow y^{1/2} = z = \dfrac{-3}{2x}(\ln|x| + C_3) \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{2x}{-(3\ln|x| + C_n)}\right)^2 = \dfrac{4x^2}{(3\ln|x| + C)^2}$.

Återstår $a = 1$ som ger en 1:a ordningen linjär ekv: $y' - \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)y = 0$ som också är separabel: $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)dx \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| - \dfrac{3}{x} + \ln C_1$, $C_1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left|\dfrac{y}{C_1x^2}\right| = -\dfrac{3}{x} \Leftrightarrow \left|\dfrac{y}{C_1x^2}\right| = e^{\ln|\frac{y}{C_1x^2}|} = e^{-3/x} \Leftrightarrow y = \pm C_1x^2e^{-3/x} = Cx^2e^{-3/x}$, $C \in \mathbb{R}$.