

Tentamen, Mat. Met. E1, del B, TMA042b

OBS! Linje och inskrivningsår samt namn och personnummer skall anges.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Lös differentialekvationerna

a) $y' = 3\frac{y^2 - 3y + 2}{x^2 - 3x}$, $x > 3$, $y(4) = \frac{7}{3}$,
b) $y'' - 3y' - 10y = e^{4x} + 1$. (8p)

2. Låt $P = (2, 5, 3)$, $S = (4, 1, 9)$.

- a) S är spegelbilden av P då speglingen sker i ett visst plan π . Bestäm en ekvation för planet π .
b) Bestäm en punkt R så att linjen genom P och R **ej** skär planet π .
c) Vad blir spegelbilden av R vid spegling i planet π ? (6p)

3. Lös ekvationen $z^3 + (-3 + 2i)z^2 + (-3 - 16i)z + 5 + 14i = 0$. Rötterna skall anges på enklast möjliga sätt på formen $a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Ledning: En rot är reell. Kontrollera att $z_1 + z_2 + z_3 = 3 - 2i$. (6p)

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2p & -6 \\ -3 & -5p - 3 & 20 \\ 1 & 6 & p - 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} p - 6 \\ 2p + 11 \\ p^2 - 6p + 10 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) Beräkna $\det A$.
b) Lös för **alla** värden på p , ekvationssystemet $A\vec{x} = b$.
c) Bestäm en lösning med $x + 6y - z = 35$. (6p)

5. Lös differentialekvationen

$$x^2 y'' + 5xy' + 13y = \sin(\ln x) + \ln(x^{13}) + 4, \quad x > 0. \quad (6p)$$

6. Är följande integraler konvergenta eller divergenta?

a) $\int_2^\infty \frac{\sin(e^{x^2}) + e^{\sin(x^2)}}{x^2 - 1} dx$,
b) $\int_1^\infty \frac{e^{\sin(x^2)}}{x^2 - 1} dx$. (6p)

7. Bevisa satsen om absolutkonvergens för integraler. (6p)

8. Bevisa att om matrisen A är inverterbar, så är inversen entydig. (6p)