1. a) $y' = 3\frac{y^2-3y+2}{x^2-3x} = 3\frac{(y-2)(y-1)}{x(x-3)}$, separabel, $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{(y-2)(y-1)} = 3\int \frac{dx}{x(x-3)} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right) dx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = \ln\left|\frac{x-3}{x}\right| + \ln C_1,\ C_1 > 0 \Rightarrow \frac{y-2}{y-1} = C\frac{x-3}{x},\ C \neq 0$. Data $x = 4,\ y = \frac{7}{3}$ ger $\frac{1/3}{4/3} = C\frac{1}{4} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow yx - 2x = yx - 3y - x + 3 \Rightarrow$ $\underline{y = \frac{x+3}{3}}$.

   b) $y'' - 3y' - 10y = e^{4x} + 1,\ y_h$: kar. ekv.: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = 5 \Rightarrow y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{5x}$; $y_{p_1} : P(D)y = e^{4x}$, Ansätt $y = ke^{4x} \Rightarrow y' = 4ke^{4x},\ y'' = 16ke^{1x}$ och $(16k - 12k - 10k)e^{4x} = e^{4x} \Rightarrow k = \frac{-1}{6} \Rightarrow y_{p_1} = \frac{-1}{6}e^{4x}$; $y_{p_2} : P(D)y = 1 \Rightarrow y_{p_2} = \frac{-1}{10}$.
   $\therefore y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1e^{-2x} + C_2e^{5x} - \frac{1}{6}e^{4x} - \frac{1}{10}$.

---

2. Givet $P = (2;5;3),\ S = (4;1;9)$

   a. $\overrightarrow{PS} = (2,-4,6)$, $\mathbb{Q}$ är mittpunkten $(3;3;6)$ och $\mathbf{n} = (1,-2,3)$ är en normal till planet $\pi :\ x - 2y + 3z = D$. Ins. av $\mathbb{Q}$ ger $3 - 6 + 18 = D \Rightarrow D = 15$. $\therefore\ \pi : \underline{x - 2y + 3z = 15}$

   b. Om $R = (a;b;c)$ så duger R sådant att $\overrightarrow{PR} \perp m \Leftrightarrow (a-2, b-5, c-3)\cdot(1,-2,3) = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 3c = 1$. Tag t. ex. $\underline{R = (1;0;0)}$.

   c. Låt T vara spegling av $R \Rightarrow \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PS} = (2,-9,6)\ \therefore \overrightarrow{OT} = (1,0,0) + (2,-4,6) = (3,-4,6) \Rightarrow \underline{T = (3,-9,6)}$.

---

3. Givet $p(z) = z^3 + (-3+2i)z^2 + (-3-16i)z + 5 + 14i = 0$ och insättning av en reell rot $z = x$ ger genom identifikation av real- resp. imaginärdel Re : $x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0$ (1) Im : $2x^2 - 16x = 14 = 0$ (2). Nu ger (2) att $x = 1$ eller 7. Bara $x = 1$ är också rot till (1) $\Rightarrow \underline{z_1 = 1} \Rightarrow p(z) = (z-1)(z^2 + (-2+2i)z - 5 - 14i) = 0$ Kvadratkomplettering av 2:a-gradsfaktorn ger $(\underbrace{z + (-1+i)}_{a+ib})^2 = 5 + 14i - 2i = 5 + 12i$

$$\therefore \begin{cases} Re : a^2 - b^2 = 5 & a^2 = 9 \\ Im : 2ab = 12 & \Rightarrow\ ab = 6 \\ Belopp : a^2 + b^2 = 13 & b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} a = 13 \\ b = -2 \end{cases}$$

$\underline{z_2} = 1 - i + 3 + 2i = \underline{4 + i}$
$\underline{z_3} = 1 - i - 3 - 2i = \underline{-2 - 3i}$

Kontroll: $z_1 + z_2 + z_3 = 3 - 2i$; OK.

---

4 a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2p & -6 \\ -3 & -5p-3 & 20 \\ 1 & 6 & p-8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{3} & \boxed{-1} \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2p & -6 \\ 0 & p-3 & 2 \\ 0 & 6-2p & p-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{2} \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2p & -6 \\ 0 & p-3 & 2 \\ 0 & 0 & p+2 \end{vmatrix}$

$= \underline{(p-3)(p+2)}$.

b) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} p-6 \\ 2p+11 \\ p^2-6p+10 \end{bmatrix}$ $\underset{\hookleftarrow}{\boxed{3}}$ $\underset{\hookleftarrow}{\boxed{-1}}$ Med operationer enl. ovan fås $\mathbf{b} \overset{RE}{\sim} \begin{bmatrix} p-6 \\ 5p-7 \\ p^2-7p+16 \end{bmatrix}$ $\underset{\hookleftarrow}{\boxed{2}}$ $\overset{RE}{\sim}$ $\begin{bmatrix} p-6 \\ 5p-7 \\ p^2+3p+2 \end{bmatrix}$. Detta ger $\begin{bmatrix} 1 & 2p & -6 & | & p-6 \\ 0 & p-3 & 2 & | & 5p-7 \\ 0 & 0 & p+2 & | & p^2+3p+2 \end{bmatrix}$.

<u>Fall 1:</u> $p \neq -2, 3$ (entydig lösn.) : $z = \frac{(p+1)(p+2)}{p+2} = p+1$, $y = \frac{5p-7-2p-2}{p-3} = \frac{3p-9}{p-3} = 3$, $x = p-6-6p+6p+6 = p$;

<u>Fall 2:</u> $p=-2$: $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & | & -8 \\ 0 & -5 & 2 & | & -17 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 38t + \frac{28}{5} \\ y = 2t + \frac{17}{5} \\ z = 5t \end{cases}$

<u>Fall 3:</u> $p=3$: $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -6 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 5 & | & 20 \end{bmatrix}$ $\underset{\hookleftarrow}{\boxed{-5/2}}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = -6s + 21 \\ y = s \\ z = 4 \end{cases}$

c) $x + 6y - z = 35$ ger: <u>Fall 1:</u> $p + 18 - p - 1 = 35$, Går ej; <u>Fall 2:</u> $38t + \frac{28}{5} + 12t + \frac{102}{5} - 5t = 35 \Rightarrow t = \frac{1}{5} \Rightarrow$ Ja: $x = \frac{66}{5}, y = \frac{19}{5}, z = 1$ (för $p=-2$); <u>Fall 3:</u> $-6s + 21 + 6s - 4 = 35$ Går ej.

---

5. $x^2y'' + 5xy' + 13y = \sin(\ln x) + \ln(x^{13}) + 4, x > 0$, Euler, sätt $t = \ln x$, $D = \frac{d}{dt} \Rightarrow (D(D-1) + 5D + 13)y = \sin t + 13t + 4 \Leftrightarrow (D^2 + 4S + 13)y = \sin t + 13t + 4$. y_h : *kar. ekv.* : $r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \pm 3i \Rightarrow y_h = e^{-2t}(A\cos 3t + B \sin 3t)$; y_{p_1} : $P(D)y = \sin t \Rightarrow \omega = 1 \Rightarrow \frac{1}{-1+4j+13} = \frac{12-4j}{160} = \frac{3-j}{40} \Rightarrow y_{p_1} = \frac{1}{40}(3\sin t - \cos t)$; y_{p_2} : $P(D)y = 13t + 4$, ansätt $y = at + b \Rightarrow y' = a$, $y'' = 0 \Rightarrow 4a + 13at + 13b = 13t + 4 \Rightarrow a = 1$, $b = 0 \Rightarrow y_{p_2} = t$

$\therefore$ $\underline{y = \frac{1}{x^2}(A\cos(3\ln x) + B\sin(3\ln x)) + \frac{1}{40}(3\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \ln x}$.

---

6 a) $I_1 = \displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin(e^{x^2}) + e^{\sin(x)}}{x^2-1} dx$

$|f(x)|^2 \leq \dfrac{1+e}{x^2-1} \leq \dfrac{10}{x^2}$ på $[2, \infty]$

(ty $\Leftrightarrow x^2 + ex^2 \leq 10x^2 - 10 \Leftrightarrow 10 \leq (9-e)x^2$ samt om $x \geq 2$)

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{10}{x^2} dx$ är konv. $(2 > 1)$

$\therefore I_1$ är abs.-konv. och därmed <u>konv</u>.

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\sin(x^2)}}{x^2-1} dx = \int_1^2 \ldots + \int_2^\infty \ldots = I_3 + I_4$

På $[1,2]$: $\dfrac{e^{\sin(x^2)}}{(x-1)(x+1)} \geq \dfrac{e^{-1}}{(x-1)3}$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = [\ln|x-1|]_1^2$ är div.

$\therefore I_3$ är div. $\therefore I_2$ <u>div.</u>