Mat Met. E1 del B TMA 042b 2002-04-04

1 a) $y^2-4y+3=(y-3)(y-1)$ och ekv. separabel $\Rightarrow 2\int\frac{dy}{(y-3)(y-1)}=5\int\frac{dx}{x(x-5)} \Leftrightarrow \int\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-1}dy=\int\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-3}{y-1}\right|=\ln\left|\frac{x-5}{x}\right|+\ln C_1,\ C_1>0 \Leftrightarrow \frac{y-3}{y-1}=C\frac{x-5}{x}, C\neq 0$ Data $y(10)=5 \Rightarrow C=1 \Rightarrow x(y-3)=(y-1)(x-5) \Leftrightarrow y=\frac{2x+5}{5}$

b) Kar. ekv. $0=r^2-5r+6=(r-2)(r-3) \Rightarrow y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Ansätt $y_{p_1}=ze^{3x}$ och Heaviside $\Rightarrow e^{3x}=P(D)y_{p_1}=e^{3x}P(D+3)z=e^{3x}(D+3-2)(D+3-3)z \Rightarrow (D^2+D)z=1$. Ansätt $z=Ax+B\quad z'=A, z''=0 \Rightarrow A=1$. Välj $B=0\ \therefore y_{p_1}=xe^{3x}$ löser $P(D)y=e^{3x}$. Lös nu $P(D)y=1$. Ansätt $y_{p_2}=C$ och insättning $\Rightarrow 6C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{6}\ \therefore y=y_k+y_p=y_h+y_{p_1}+y_{p_2}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+xe^{3x}+\frac{1}{6}$

---

2. $$\det A=\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccc}1&a&2&0\\2&2&4&1\\-1&2&a&a+2\\1&1&1&1\end{array}\right|\\ \begin{array}{cccc}\boxed{-1}&\uparrow&\uparrow&\uparrow\end{array}\end{array}=\left|\begin{array}{cccc}1&a-1&1&-1\\2&0&2&-1\\-1&3&a+1&a+3\\1&0&0&0\end{array}\right|=(-1)^{4+1}\left|\begin{array}{ccc}a-1&1&-1\\0&2&-1\\3&a+1&a+3\end{array}\right|$$

$=$ (utveckla! 2:a rad) $=-\left(2(-1)^{2+2}\left|\begin{array}{cc}a-1&-1\\3&a+3\end{array}\right|-(-1)^{2+3}\left|\begin{array}{cc}a-1&1\\3&a+1\end{array}\right|\right)=-2((a-1)(a+3)+3)-((a-1)(a+1)-3)=-(3a^2+4a-4)=-(a+2)(3a-2)$ så A inverterbar för $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2/3\}$. Vidare gäller för $a=0$ att Gauss-Jordan $\Rightarrow A=$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&1&0&0&0\\2&2&4&1&0&1&0&0\\-1&2&0&2&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\boxed{-2}\ \boxed{1}\ \boxed{-1}\\ \leftarrow\\ \quad\leftarrow\\ \qquad\leftarrow\end{array} \underset{\sim}{RE}$$

$$\underset{\sim}{RE}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&1&0&0&0\\0&2&0&1&-2&1&0&0\\0&2&2&2&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \leftarrow\\ \leftarrow\\ \boxed{-2}\end{array}\underset{\sim}{RE}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&1&0&0&0\\0&0&2&-1&0&1&0&-2\\0&0&4&0&3&0&1&-2\\0&1&-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \boxed{-2}\\ \leftarrow\\ \\ \end{array}\underset{\sim}{RE}$$

$$\underset{\sim}{RE}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&1&0&0&0\\0&0&2&-1&0&1&0&-2\\0&0&0&2&3&-2&1&2\\0&1&-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \boxed{2}\leftarrow\\ \boxed{1}\ \boxed{-1}\\ \boxed{2}\quad\leftarrow\end{array}\underset{\sim}{RE}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&1&0&0&0\\0&0&4&0&3&0&1&-2\\0&0&0&2&3&-2&1&2\\0&2&-2&0&-5&2&-1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\boxed{2}\leftarrow\\ \quad\boxed{-1}\ \boxed{1}\\ \\ \boxed{2}\qquad\leftarrow\end{array}$$

$$\underset{\sim}{RE}\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&0&0&0&-1&0&-1&2\\0&0&4&0&3&0&1&-2\\0&0&0&2&3&-2&1&2\\0&4&0&0&-7&4&-1&-2\end{array}\right)\underset{\sim}{RE}\left(\begin{array}{cccc|c}4&0&0&0&\\0&4&0&0&\\0&0&4&0&\\0&0&0&4&\end{array}\underbrace{\begin{array}{cccc}-2&0&-2&4\\-7&4&-1&-2\\3&0&1&-2\\6&-4&2&4\end{array}}_{=4A^{-1}\text{ då }a=0}\right)$$

---

3. Reella koeff. $\Rightarrow z_2\equiv\overline{z_1}=4+i$ också rot. Då delar $(z-z_1)(z-\overline{z_1})=z^2-(z_1+\overline{z_1})z+|z_1|^2=z^2-8z+17$ polynomet. Så $p(z)=(z^2-8z+17)(z^2+az+b)$ och man ser att $b=+15$ och $a=-8$. Lös nu $z^2-8z+15=0$ och man ser att $z_3=3,\ z_4=5$ är rötter.

---

4. På intervallet $[1, \infty)$ så är integranden ≥ 0. Vi vet också att polynom växer fortare än logaritmer; mer precist låt $f(x) = x - \ln x$. Då gäller $f(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0,\ x > 1$ så $f(x) \geq f(1) = 1,\ x \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq x - 1,\ x \geq 1$. Vi får alltså att $0 \leq \dfrac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \leq \dfrac{x(x-1)}{(1+x^2)^2} \leq \dfrac{x \cdot x}{x^4} = \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$ för $x \geq 1$. Då ju $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ är konv. så ger jämförelsekriteriet för positiva integrander att även $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}$ är konvergent.

---

5. Variabeln x förekommer ej explicit så sätt $p = y'$ vilket ger $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Insättning ger $p\frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ ty $p = y' \equiv 0$ är ej lösning då ju $y(0) = y'(0) = 2 \neq 0$. Denna ekv. är linjär av första ordning med IF: e^{-y} så vi får $\frac{d}{dy}(pe^{-y}) = (1-y)e^{-y}$ som ger $pe^{-y} = \int \frac{d}{dy}(pe^{-y})dy = \int (1-y)e^{-y}dy + A$ där A konst. PI ger $pe^{-y} = ye^{-y} + A \Rightarrow y' = p = y + Ae^y$. Villkoren $y'(0) = y(0) = 2 \Rightarrow A = 0$ så $y' - y = 0$ som är linjär av första ordning (och även sep.) med lösn. $y = Be^x$ och $y(0) = 2$ ger $B = 2$. Sökt lösning är alltså $y = 2e^x$.

---

6. $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & p & 1 \\ -3 & -5p-3 & -2p-3 & 2p-9 \end{array}\right) \underset{\hookleftarrow}{\boxed{3}} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & p & 1 \\ 0 & p-3 & p-3 & 2(p-3) \end{array}\right)$

$\underline{p = 3:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, dvs lösningarna utgörs av planet $x + 6y + 3z = 1$ som har normalvektor $n = (1, 6, 3)$ och $P_0 = (1, 0, 0)$ är i planet så avståndet mellan origo $P_1 = (0, 0, 0)$ och planet är $d = \dfrac{|n \cdot \overrightarrow{P_0P_1}\,|}{|n|} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{46}}$. Punkten i planet närmast origo fås som skärningen mellan planet och linjen genom origo med riktningsvektor n, dvs linjen $\ell : (x, y, z) = sn,\ s \in \mathbb{R}$. Insättning i planets ekv. ger $s = 1/46$ och punkten i planet närmast origo är alltså $(x, y, z) = \frac{1}{46}(1, 6, 3)$.

$\underline{p \neq 3:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & p & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow z = s,\ y = -s + 2,\ x = -2py - pz + 1 = ps - 4p + 1$ så lösningarna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1-4p \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_0}$ bildar en linje. Avståndet mellan origo och linjen ges av $d = \dfrac{|v \times \overrightarrow{P_0P_1}\,|}{|v|}$ och $v \times \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ p & -1 & 1 \\ 4p-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 4p-1, 2p-1)$ så avståndet $d = \frac{\sqrt{4+(4p-1)^2+(2p-1)^2}}{\sqrt{p^2+(-1)^2+1^2}} = \sqrt{\frac{20p^2-12p+6}{p^2+2}} = \sqrt{20 - \frac{12p+34}{p^2+2}}$ och avståndet minimalt då $f(p) \equiv 20 - \dfrac{12p+34}{p^2+2}$ minimalt. Vi ser att $f'(p) = 12(p^2 + \frac{17}{3}p - 2)/(p^2+2)^2$ så $f'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3},\ -6$. Teckenstudie:

p		-6		$1/3$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$

och då $\lim_{p \to -\infty} f(p) = 20$ ser vi att minimum är 2, dvs minsta avståndet är $\sqrt{2} > 1/\sqrt{46}$. $\therefore$ lösning närmast origo är $\frac{1}{46}(1, 6, 3)$.