Mat. Metoden E1 del B, TMA042b 2002-08-30

1. a) $xy'+3y=x^2 \Rightarrow y'+\frac{3}{x}y=x$. IF: $e^{3\int\frac{1}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(x^3y)=x^4\Rightarrow x^3y=\displaystyle\int\frac{d}{dx}(x^3y)\,dx=\int x^4\,dx=\frac{1}{5}x^5+C\Rightarrow y=\frac{x^2}{5}+Cx^{-3}$ b) Kar. ekv.: $r^2-3r-10=0\Rightarrow r_{1,2}=-2,\ 5\Rightarrow y_h=C_1e^{-2x}+C_2e^{5x}$. Finn nu en partikulärlösning y_1 s.a. $P(D)y_1\equiv y_1''-3y_1'-10y_1=e^{4x}$. Ansätt $y_1=ze^{4x}$ och Heaviside $\Rightarrow e^{4x}=P(D)y_1=e^{4x}P(D+4)z=e^{4x}((D+4)^2-3(D+4)-10)z\Rightarrow (D+4+2)(D+4-5)z=1\Rightarrow (D+6)(D-1)z=1\Rightarrow(D^2+5D-6)z=1$. Ansätt $z=C\Rightarrow -6C=1\Rightarrow C=-1/6\Rightarrow y_1=-\frac{1}{6}e^{4x}$.
Lös $P(D)y_2=1$. Ansätt $y_2=C\Rightarrow -10C=1\Rightarrow y_2=-1/10 \therefore y_p=y_1+y_2=-\frac{1}{6}e^{4x}-\frac{1}{10}$
$\therefore y=y_n+y_p=C_1e^{-2x}+C_2e^{5x}-\frac{1}{6}e^{4}-\frac{1}{10}$

---

2. Finn x s.a. $\det A=0\Rightarrow 0=\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}\begin{array}{c}\boxed{-x}\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array}=\begin{vmatrix}1&x&x\\0&1-x^2&x-x^2\\0&x-x^2&1-x^2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1-x^2&x-x^2\\x-x^2&1-x^2\end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix}(1-x)(1+x)&x(1-x)\\x(1-x)&(1-x)(1+x)\end{vmatrix}=(1-x)^2\begin{vmatrix}1+x&x\\x&1+x\end{vmatrix}=(1-x)^2((1+x)^2-x^2)=(1-x)^2(1+2x)\Rightarrow$
$x=1,\ x=-\frac{1}{2}$. För $x=-1$ är alltså A inverterbar och vi finner inversen med Jacobis metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\-1&1&-1&0&1&0\\-1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\boxed{+1}\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&0&-2&1&1&0\\0&-2&0&1&0&1\end{array}\right)\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&-2&0&1&0&1\\0&0&-2&1&1&0\end{array}\right)\begin{array}{cc}\leftarrow&\leftarrow\\ \boxed{-1}&\\ &\boxed{-1}\end{array}$$

$$\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&-1&-1\\0&-2&0&1&0&1\\0&0&-2&1&1&0\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

---

3. $z^2-(1+i)z-(4+7i)=0\Leftrightarrow\left(z-\dfrac{1+i}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^2-\left(4+7i\right)=0\Leftrightarrow\left(z-\dfrac{1+i}{2}\right)^2=4+\dfrac{15i}{2}$.
Sätt $z-\dfrac{1+i}{2}=x+iy\Rightarrow(x+iy)^2=4+\dfrac{15i}{2}\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=4+\dfrac{15i}{2}$. Också $x^2+y^2=$
$|x+iy|^2=\left|\left(z-\dfrac{1+i}{2}\right)^2\right|=\left|4+\dfrac{15i}{2}\right|=\sqrt{16+\dfrac{225}{4}}=\dfrac{17}{2}\therefore\begin{cases}x^2+y^2=17/2\\x^2-y^2=4\\2xy=15/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=25/4\\y^2=9/4\\2xy=15/2\end{cases}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}x=5/2,\ y=3/2\\ \text{eller}\\ x=-5/2,\ y=-3/2\end{cases}\quad\therefore z-\dfrac{1+i}{2}=x+iy=\pm\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)\Rightarrow z_1=3+2i,\ z_2=-(2+i).$

---

4. $\displaystyle\int_1^\infty\frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx=\int_1^e+\int_e^\infty$ där den första integralen är konv. För $\displaystyle\int_e^\infty\frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx$ gäller att för $x\ge e$ har vi $1+x^2\le e^2+x^2\le x^2+x^2=2x^2$ så $0\le\dfrac{1}{2x}=\dfrac{x}{2x^2}\le\dfrac{x\ln x}{1+x^2}$ och då $\displaystyle\int_e^\infty\frac{1}{2x}\,dx$ är divergent följer av jämf. krit. att också $\displaystyle\int_e^\infty\frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx$ är divergent och därmed gäller detsamma $\displaystyle\int_1^\infty\frac{x\ln x}{1+x^2}dx$.

---

5. $xy''=\sqrt{1+(y')^2}$. Sätt $p=y'\Rightarrow p'=\dfrac{d}{dx}p=\dfrac{d}{dx}y'=y''\Rightarrow xp'=\sqrt{1+p^2}\Rightarrow\dfrac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow$
$\ln|p+\sqrt{1+p^2}|=\ln|x|-\ln C_1,\ C_1\ge0\Rightarrow|p+\sqrt{1+p^2}|=|\dfrac{x}{C_1}|\Rightarrow p+\sqrt{1+p^2}=\pm\dfrac{x}{C_1}=Cx,\ C\ne0$
Villkoret $0=y'(1)=p(1)\Rightarrow 0+\sqrt{1+0^2}=C\Rightarrow C=1\therefore p+\sqrt{1+p^2}=x\Rightarrow\sqrt{1+p^2}=x-p\Rightarrow$
$1+p^2=(x-p)^2=x^2+p^2-2xp\Rightarrow 2xp-x^2+1=0\Rightarrow y'=\frac{x^2-1}{2x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C_2\right)$
Villkoret $0=y(1)\Rightarrow 0=\frac{1}{2}-0+C_2\Rightarrow C_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{4}(x^2-1-2\ln|x|)$.

---

6. Låt A,B,C,D vara hörnen i fyrhörningen och E,F,G och H vara mittpunkterna på AB, BC, CD och DA. Det är tillräckligt att visa att $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ ty då är ju sidan EF och HG parallella och har samma längd. Observera att $\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Vi får: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC})$.
Också: $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\therefore\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HG}$.

---

7. Påståendet $\det(A+B^T)=\det(A^T+B)$ är sant ty $\det(A+B^T)=\det((A^T+B)^T)=\det(A^T+B)$. I det argument som ges används $\det(X+Y)=\det X+\det Y$ på två ställen, men $\det(X+Y)\ne\det X+\det Y$ i allmänhet.