1. $z^2-(12-22j)z=88+136j \Leftrightarrow (\underbrace{z-(6-11j)}_{w})^2=88+136j+36-121-132j \Leftrightarrow w^2=3+4j$. Sätt $w=x+jy \ \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & \text{(Re)} \\ 2xy=4 & \text{(Im)} \\ x^2+y^2=5 & \text{(Belopp)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 & \Leftrightarrow & x=\pm 2 \\ xy=2 & \Leftrightarrow & xy=2 \\ 2y^2=2 & \Leftrightarrow & y=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} w_1=2+j \\ w_2=-2-j \end{matrix} \Rightarrow$$

$z_1=w_1+6-11j=8-10j$ och $z_2=w_2+6-11j=4-12j$. Vidare är $|z_1|^2=64+100=164$ och $|z_2|^2=16+144=160$. Alltså är $z_1=8-10j$ den sökta roten.

2a. $(x^2+x)y'=y^2-y,\ y(2)=3$ Sep. ekv. $\Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-1)}=\int \frac{dx}{x(x+1)}$ Partialbråk: $\int \Big(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\Big)dy=$ $=\int \Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\Big)dx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\ln C \Leftrightarrow 1-\frac{1}{y}=\frac{kx}{x+1}$, där $k\neq 0$ är en konstant. De i uppgiften givna villkoren ger: $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot k, \Rightarrow k=1 \therefore \frac{1}{y}=1-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1} \therefore y=x+1$. (Singulär lösn. $y=0$ resp. $y=1$ uppfyller ej villkoret $y(2)=3$).

b. $y'+\underbrace{4x}_{f(x)}y=e^{x-2x^2}(\cos x+\sin x),\ y(0)=0$. Int. faktor: $e^{F(x)}=e^{2x^2} \therefore \frac{d}{dx}(ye^{2x^2})=e^x(\cos x+\sin x) \Leftrightarrow$ $ye^{2x^2}=\int e^x(\cos x+\sin x)\,dx=e^x\sin x+C$ ty $\int e^x\cos x\,dx=\{PI\}=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$. Villkoret i uppgiften ger: $0=0+C \Rightarrow C=0 \therefore y=e^{x-2x^2}\sin x$.

3a. $\int_0^\infty \underbrace{xe^{-2x}\sin x}_{f(x)}\,dx \Rightarrow 0\le |f(x)|\le \frac{x}{e^{2x}}\cdot 1\le \frac{e^x}{e^{2x}}=e^{-x},\ x\in(0,\infty)$, och $\int_0^\infty e^{-x}\,dx=[-e^{-x}]_0^\infty=$ 1 är ju konvergent $\therefore \int_0^\infty |f(x)|\,dx$ är konv. enligt jämförelsekriteriet $\therefore \int_0^\infty f(x)\,dx$ är konv. enligt satsen om Absolutkonvergens.

b. Låt $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx=\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx+\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx=I_1+I_2$. För I_1: $\frac{\sin x}{x^2}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\ge \frac{1}{10}\frac{1}{x}>0$, då $x\in(0,1)$ ty $\frac{\sin x}{x}\to 1$ då $x\to 0$. Men $\int_0^1 \frac{1}{10}\frac{1}{x}\,dx$ är divergent ty gränsvärdet $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Big[\frac{1}{10}\ln|x|\Big]_\varepsilon^1$ existerar ej $\therefore I_1$ divergent enligt jämförelsekriteriet $\therefore I$ divergent.