1a. Lös $P(D)y = y'' + y' - 6y = 4e^x - 6x + 7$, där $P(D) = D^2 + D - 6$. Vi finner y_h : Kar. ekv.: $r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -3 \ \therefore\ y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$.

Vi finner härnäst y_{p_1} som löser $P(D)y_{p_1} = 4e^x$. Ansätt $y = z(x)e^x \Rightarrow y' = z'e^x + ze^x,\ y'' = z''e^x + 2z'e^x + ze^x \Rightarrow\ 4e^x = P(D)y_{p_1} = P(D)(ze^x) = (\text{Heaviside}) = e^xP(D+1)z$. Nu är $P(D+1) = (D+1)^2 + (D+1) - 6 = D^2 + 3D - 4 \therefore (D^2 + 3D - 4)z = 4 \Rightarrow\ z = -1 \Rightarrow\ y_{p_1} = -e^x$.

För y_{p_2} ansätter vi $y_{p_2} = ax + b, \Rightarrow y'_{p_2} = a,\ y''_{p_2} = 0 \Rightarrow a - 6ax - 6b = -6x + 7 \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow y_{p_2} = x - 1$.

$\therefore y_p \equiv y_{p_1} + y_{p_2} = -e^x + x - 1$ är en partikulärlösning. $\therefore y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - e^x + x - 1$.

b. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2,\ x > 0$ Detta är en Euler, så vi substituerar $t = \ln x, x = e^t$ Detta ger att $x^2y'' = D(D-1)y,\ xy' = Dy$ där $D = \frac{d}{dt} \therefore (D^2 - D + 3D + 1)y = e^{2t} \Leftrightarrow (D^2 + 2D + 1)y = e^{2t}$. För y_h ser vi att kar. ekv.: $(r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1, \Rightarrow y_h = (C_1t + c_2)e^{-t}$

För y_p ansätter vi $y = ke^{2t},\ y' = 2ke^{2t},\ y'' = 4ke^{2t} \Rightarrow (4k + 4k + k)e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow k = \frac{1}{9} \Rightarrow y_p = \frac{1}{9}e^{2t}$

$\therefore y = (C_1t + C_2)e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t} = (C_1 \ln x + C_2)\frac{1}{x} + \frac{1}{9}x^2$.

---

2. $P = (1,3,2),\ Q = (2,-1,3),\ R = (3,4,0),\ S = (1,-2,1)$ Välj planet π så att $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ är parallella med π. För att detta ska vara uppfyllt så ska π ha en normal som är parallell med $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Nu är $\overrightarrow{PQ} = (1,-4,1)$ och $\overrightarrow{PR} = (2,1,-2)$, så $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (\text{Sarrus}) = (7,4,9)$

$\therefore$ Planets ekvation är $7x + 4y + 9z + D = 0$ för något tal D. För att bestämma D använder vi att $S \in \pi \Rightarrow 7 - 8 + 9 + D = 0 \Rightarrow D = -8 \therefore \pi$ har ekvationen $7x + 4y + 9z = 8$.

---

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 13+2a \\ -2 & -5 & 1 & -21 \\ -3 & -7 & 4 & -25 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{2}\ \boxed{3} \\ \leftarrow \\ \quad\leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 13+2a \\ 0 & 1 & 1+2a & 5+4a \\ 0 & 2 & 4+3a & 14+6a \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 13+2a \\ 0 & 1 & 1+2a & 5+4a \\ 0 & 0 & 2-a & 4-2a \end{array}\right)$$

Fall 1: $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -22 + 13t \\ y = 13 - 5t \\ z = t \end{cases}$

Fall 2: $a \neq 2 \Rightarrow z = (4-2a)/(2-a) = 2, \Rightarrow y = 3,$ och $x = 4$.

Vi ser att $xz + yz = 45$ **ej** är uppfyllt i fall 2. I fall 1 får vi $t(8t - 9) = z(x + y) = 45 \Rightarrow t = 3$ (eller $t = \frac{-15}{8}$) $\therefore$ lösningen $x = 17,\ y = -2,\ z = 3$ uppfyller kravet.