

Tentamen, Mat. Met. E1, del B, TMA042b

OBS! Linje och inskrivningsår samt namn och personnummer skall anges.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Lös ekvationen $z^2 + z - iz - 13i = 0$. Rötterna skall anges på enklast möjliga sätt på formen $a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$. (6p)

2. Låt $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (2, 3, 1)$, $P_3 = (0, 1, 2)$, $P_4 = (3, 2, 1)$ och $P_5 = (-1, 2, 3)$. Bestäm det plan som innehåller punkterna P_3 , P_4 och P_5 och dess skärningspunkt, om sådan existerar, med linjen genom P_1 och P_2 . (7p)

3. För vilka $a \in \mathbf{R}$ är ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - z & = -6 \\ 2x + (a - 1)y - (a + 1)z + v & = 3 \\ -2x + y + (a + 1)z - v & = 3 \\ -x + (a + 2)y + z + (a - 2)v & = -3 \end{cases}$$

entydigt lösbar? Lös även systemet för $a = -1$. (6p)

4. Lös differentialekvationerna

a) $x^3 y' = 4 \ln x - 2x^2 y$,
b) $y'' + 2y' = x \sin x$, (6p)

5. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} y' - y - z = x \\ z' + 4y + 3z = 2x \end{cases} \quad (6p)$$

6. Avgör om integralen

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x) \ln \sin x \, dx$$

är konvergent eller divergent. Om möjligt, beräkna den också. (Motivera väl!) (6p)

7. Vad kallas en differentialekvation på formen $g(y)y' + f(x) = 0$? Ange den allmänna lösningen till en sådan ekvation och bevisa att det är den allmänna lösningen. (6p)

8. Bevisa att ett homogent linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar. (7p)