1. a) $xy' - 2y = x^3\cos x \Rightarrow y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x$, 1:a ordn. linjär. IF: $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = |x|^{-2} = x^{-2} \therefore$
$\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = x^{-2}x^2\cos x = \cos x \Leftrightarrow x^{-2}y = \int \frac{d}{dx}(x^{-2}y)dx + C = \int \cos x dx + C = \sin x + C \Leftrightarrow$
$y = x^2(\sin x + C)$

   b) $e^y y' = \ln x$, separabel $\Leftrightarrow \int e^y dy = \int \ln x dx + C \Leftrightarrow e^y = x\ln x - x + C \Leftrightarrow$
$y = \ln|x\ln x - x + C|$

   c) $y'' + 2y' = 6e^x \Rightarrow y = y_n + y_p$. Kar. ekv: $0 = r^2 + 2r = r(r+2) \Rightarrow y_n = A + Be^{-2x}$. Ansätt $y_p = ze^x \Rightarrow 6e^x = (D^2+2D)ze^x = e^x((D+1)^2 + 2(D+1))z \Rightarrow 6 = (D^2+2D+1+2D+2)z = (D^2+4D+3)z$. Ansätt $z = C \Rightarrow 3C = 6 \Rightarrow C = 2 \therefore y_p = 2e^x \therefore y = A + Be^{-2x} + 2e^x$.

---

2. Låt $a \in \mathbb{R}$ vara rot $\Rightarrow a^3 + 3(2-3i)a - (7-9i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 + 6a - 7 = 0 \\ -9a + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$
$\therefore p(z) = (z-1)(z^2 + kz + 7 - 9i)$ och ident. av koeff. för t ex z^2-termen ger: $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.
Lös nu $0 = z^2 + z + 7 - 9i = (z + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 7 - 9i \Leftrightarrow (z+\frac{1}{2})^2 = -\frac{27}{4} + 9i$. Sätt $z + \frac{1}{2} = x + iy \therefore$
$x^2 - y^2 + 2ixy = -\frac{27}{4} + 9i$ och $x^2 + y^2 = |x+iy|^2 = |(x+iy)^2| = |-\frac{27}{4} + 9i| = 9|-\frac{3}{4} + i| = 9\sqrt{\frac{9}{16} + 1} =$
$9 \cdot \frac{5}{4} = 45/4 \therefore \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{27}{4} \\ 2xy = 9 \\ x^2 + y^2 = 45/4 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 18/4 \Rightarrow x = \pm 3/2, y = \pm 3 \therefore z + \frac{1}{2} = x + iy \Rightarrow z =$
$-\frac{1}{2} \pm \left(\frac{3}{2} + 3i\right) = \begin{cases} 1 + 3i \\ -2 - 3i \end{cases}$

---

3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10p & 5p-10 & 5p+15 \\ 3 & 7p-1 & 5p-8 & 3p^2+5p+4 \\ 2 & 4p & p-6 & -p(p+3) \end{array}\right) \boxed{1/5} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & p-2 & p+3 \\ 3 & 7p-1 & 5p-8 & 3p^2+5p+4 \\ 2 & 4p & p-6 & -p(p+3) \end{array}\right) \begin{array}{cc} \boxed{-3} & \boxed{-2} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array}$

$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & p-2 & p+3 \\ 0 & p-1 & 2(p-1) & (p-1)(3p+5) \\ 0 & 0 & -(p+2) & -(p+2)(p+3) \end{array}\right) \boxed{-1} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & p-2 & p+3 \\ 0 & p-1 & 2(p-1) & (p-1)(3p+5) \\ 0 & 0 & p+2 & (p+2)(p+3) \end{array}\right)$

$\therefore \det A = -5(p-1)(p+2)$. Fall I: $p \neq 1, -2 : z = p+3,\ y = 3p + 5 - 2(p+3) = p - 1,\ x = p + 3 - (p-2)(p+3) - 2p(p-1) = -3p^2 + 2p + 9$.

Fall II: $p = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y = s \Rightarrow z = 4,\ x = 8 - 2s$

$\therefore \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Fall III: $p = -2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$z = s,\ y = -2s - 1,\ x = -4s - 3 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

4. a) På $(0,1)$ gäller $0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ så jämf. krit. för positiva integrander ger att då $\int_0^1 1dx$ konv. så är $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ konv. b) Vi har $0 \leq \frac{x\ln x}{1+x^3} \leq \frac{x\ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x^{1/2}}\frac{1}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ för $x > x_0$ för något tillräckligt stort x_0 ty $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$. Alltså gäller $I \equiv \int_1^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}dx = \int_1^{x_0} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx + \int_{x_0}^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}dx \equiv I_1 + I_2$ där I_1 är konv, ty icke-genenraliserad och I_2 konv. enligt jämf. krit. ty $\int_{x_0}^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$ konv. $\therefore I$ konv.

---

5. $\begin{cases} y'-y-z=x \\ z'+4y+3z=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (D-1)y-z=x \\ 4y+(D+3)z=2x \end{cases} \begin{array}{c} \boxed{D+3} \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} (D-1)y-z=x \\ (D+3)(D-1)y+4y=5x+1 \end{cases}$

Nu gäller $((D+3)(D-1)+4)y=5x+1 \Leftrightarrow (D^2+2D+1)y=5x+1 \Leftrightarrow (D+1)^2y=5x+1$. Kar. ekv. $0=(r+1)^2 \Rightarrow r_{1,2}=-1 \Rightarrow y_h=(C_1x+C_2)e^{-x}$. Ansätt $y_p=Ax+B \Rightarrow y_p'=A,\ y_p''=0$ $\Rightarrow 2A+Ax+B=5x+1 \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-9 \end{cases} \therefore y=y_h+y_p=(C_1x+C_2)e^{-x}+5x-9$
$\therefore z=(D-1)y-x=C_1e^{-x}-(C_1x+C_2)e^{-x}+5-(C_1x+C_2)e^{-x}-5x+9-x=$
$=(C_1-2C_2-2C_1x)e^{-x}-6x+14$

---

6. $y''+2xy'+(1+x^2)y=(y'+xy)^{1/2}(\frac{1}{x}e^{-x^2/4}) \Leftrightarrow (D+x)^2y=((D+x)y)^{1/2}g(x),\ g(x)=e^{-x^2/4}/x$.

Sätt $z=(D+x)y \Rightarrow (D+x)z=z^{1/2}g(x) \Leftrightarrow z'+xz=g(x)z^{1/2}$, Bernoulli $\Rightarrow z=0$ eller $z^{-1/2}z'+xz^{1/2}=g(x)$. Sätt $w=z^{1/2} \Rightarrow w'=\frac{1}{2}z^{-1/2}z' \Rightarrow w'+\frac{x}{2}w=\frac{1}{2}g(x)$, 1:a ordn. linjär, IF: $e^{\int x/2\,dx}=e^{x^2/4} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2/4}w)=\frac{1}{2}e^{x^2/4}g(x) \Rightarrow e^{x^2/4}w=\frac{1}{2}\int e^{x^2/4}g(x)\,dx+C_1=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx+C_1=$ $\frac{1}{2}\ln|x|+C_1 \Rightarrow w=e^{-\frac{x^2}{4}}(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1) \Rightarrow z=e^{-x^2/2}(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2 \therefore y'+xy=(D+x)y=z=$ $e^{-x^2/2}(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2$ 1:a ordn. linjär, IF: $e^{\int xdx}=e^{x^2/2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y)=(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2 \Rightarrow$ $e^{x^2/2}y=\int(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2dx+C_2 \Rightarrow y=e^{-x^2/2}\int(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2dx+C_2e^{-x^2/2}$. Nu är $\int(\frac{1}{2}\ln|x|+$ $C_1)^2dx=\{PI\}=x(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2-2\int x(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)\frac{1}{2}\frac{1}{x}dx=x(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2-\frac{1}{2}\int\ln|x|+$ $2C_1dx=x(\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2-\frac{1}{2}(x\ln|x|-x+2C_1x)=x((\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2-\frac{1}{2}(\ln|x|+2C_1-1)) \therefore y=$ $xe^{-x^2/2}((\frac{1}{2}\ln|x|+C_1)^2-\frac{1}{2}(\ln|x|+2C_1-1))++C_2e^{-x^2/2}$. Om $z=0$ så $z=0 \Leftrightarrow (D+x)y=0 \Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y)=0 \Leftrightarrow y=Ce^{-x^2/2}$, vilket är en singulär lösning.

---

7. <u>Faktorsatsen</u>: α nollställe till polynom $P(z) \Leftrightarrow P(z)$ delbart med $z-\alpha$.
Bevis: $\Leftarrow)$: $z-a|P(z) \Rightarrow P(z)=(z-\alpha)K(z) \Rightarrow P(\alpha)=(\alpha-\alpha)K(\alpha)=0 \Rightarrow)$: $P(\alpha)=0$. Division av $P(z)$ med $z-\alpha \Rightarrow P(z)=(z-\alpha)K(z)+r(z)$ men då grad$(z-\alpha)=1$ och grad $r(z)<$ grad$(z-\alpha)$ så är grad $r(t)=0$ dvs $r(z)=r$, konstant. Då fås $0=P(\alpha)=(\alpha-\alpha)K(\alpha)+r=0+r=r \therefore P(z)=$ $(z-\alpha)K(z)$ dvs $(z-\alpha)|P(z)$.

---

8. Definition: En matris B s. a. $AB=BA=I$ kallas en invers matris till A.

Sats: Om A är inverterbar så är en invers till A entydigt bestämd.

Bevis: Antag att B och C är inversa matriser till A, dvs $\begin{cases} AB=BA=I \\ AC=CA=I \end{cases} \therefore C=CI=C(AB)=$ $CAB=(CA)B=IB=B$; dvs $C=B$, så invers entydig.