## Mat. Metoder E1 del B, TMA042b, 2002-11-16

1. a) På intervallet $[0,1]$ gäller $0 \le \sin x \le x$ så $0 \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$ på $(0,1)$. Jämf. kriteriet för positiva integrander ger att då $\int_0^1 1dx$ är konvergent så är också $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ konvergent.

   b) Vi har $0 \le \dfrac{x\ln x}{1+x^3} \le \dfrac{x\ln x}{x^3} = \dfrac{\ln x}{x^{1/2}}\dfrac{1}{x^{3/2}} \le \dfrac{1}{x^{3/2}}$ för $x > x_0$ för något tillräckligt stort $x_0$ ty $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$. Alltså gäller $\displaystyle I \equiv \int_1^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}dx = \int_1^{x_0}\frac{x\ln x}{1+x^3}dx + \int_{x_0}^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}dx \equiv I_1 + I_2$ där $I_1$ är icke-generaliserad och alltså konvergent och jämf. krit. ger att då $\displaystyle\int_{x_0}^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$ konv. så är också $\displaystyle\int_{x_0}^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}dx$ konv. $\therefore I$ konvergent.

---

2. a) $yy' = ye^{-3x^2}\tan x - 6xy^2 \Leftrightarrow y(y'+6xy) = ye^{-3x^2}\tan x \Leftrightarrow y' + 6xy = e^{-3x^2}\tan x$ om $y \neq 0$. IF: $e^{\int 6xdx} = e^{3x^2} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(ye^{3x^2}) = \tan x \Leftrightarrow ye^{3x^2} = \displaystyle\int \tan x\,dx + C_1$. Nu är $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \begin{bmatrix} t = asx \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| = -\ln|\cos x| \therefore y = e^{-3x^2}(-\ln|\cos x| + C_1) = -e^{-3x^2}(\ln|\cos x| + C_2), C_2 \in \mathbb{R}$. Vi ser också att $y \equiv 0$ är en singulär lösning.

   b) $(x-1)(x+1)y' = y^2 - 1$ är separabel och $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{(y-1)(y+1)} = \dfrac{dx}{(x-1)(x+1)}$ $\boxed{\text{om } y \neq \pm 1}$ $\displaystyle\therefore \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$. Vi betraktar $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = \{PB\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\,dz = \frac{1}{2}(\ln|z-1| - \ln z+1|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \therefore \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\ln C_2,\ C_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{C_2(x-1)}{x+1}\right| \therefore \frac{y-1}{y+1} = \pm C_2\frac{x-1}{x+1} = C\frac{x-1}{x+1}$ där $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow y = \dfrac{x+1+C(x-1)}{x+1-C(x-1)},\ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vi ser att för $C = 0$ får vi lösningen $y = 1$ och $y = -1$ är en singulär lösn.

---

3. Antag $z = a \in \mathbb{R}$ rot så $p(a) = 0 \Leftrightarrow a^3 - (3+4i)a^2 + (-3+8i)a + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a^2 - 3a + 5 = 0 & (A) \\ -4a(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ 2 \end{cases}$ men 0, 2 ej rötter till (A) $\therefore p(z)$ har ingen reell rot. Imaginära rötter: $p(ai) = 0 \leftrightarrow -ia^3 + (3+4i)a^2 + i(-3+8i)a + 5 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} -a(a^2-4a+3) = 0 \\ 3a^2 - 8a + 5 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -a(a-1)(a-3) = 0 \\ (a-1)(3a-5) = 0 \end{cases}$ och vi ser att $a = 1$ är den enda gemensamma roten. dvs $p(i) = 0 \therefore 0 = p(z) = (z-i)(z^2+kz+5i) = z^3 + kz^2 + 5iz - iz^2 - ikz + 5$ och identifikation av koeff. (för $z^2$) ger: $a - i = -(3+4i) \leftrightarrow a = -3(1+i) \therefore 0 = p(z) = (z-i)(z^2 - 3(1+i)z + 5i) \Rightarrow 0 = z^2 - 3(1+i)z + 5i = \left(z - \dfrac{3(1+i)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3(1+i)}{2}\right)^2 + 5i \Leftrightarrow \left(z - \dfrac{3(1+i)}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3(1+i)}{2}\right)^2 - 5i = \dfrac{9(1-1+2i)}{4} - 5i = \dfrac{9i}{2} - \dfrac{10i}{2} = -i/2$. Sätt $z - \dfrac{3(1+i)}{2} = w = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\therefore z = \dfrac{3(1+i)}{2} + w = \dfrac{3(1+i)}{2} + \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases} = \begin{cases} 2+i \\ 1+2i \end{cases} \therefore z_1 = i, z_2 = 1+2i, z_3 = 2+i$ hörn i $Q$. Då $|z_1 - z_2| = |1+i| = \sqrt{2} = |z_2 - z_3|$ så är $z_1$ och $z_3$ diametrala hörn i $Q$, som alltså har mittpunkt $m = \dfrac{z_1+z_3}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i \therefore z_4 = m + i\,\overrightarrow{mz_1} = m + i(\overrightarrow{Oz_1} - \overrightarrow{O_m}) = m + i(z_1 - m) = 1 + i + i(i - (1+i)) = 1 + i - i = 1 \neq z_2$.

---

4. <u>Faktorsatsen</u>: $\alpha$ nollställe till polynom $P(z) \Leftrightarrow P(z)$ delbart med $z - \alpha$. $\Leftarrow) :\ z - a|P(z) \Rightarrow P(z) = (z-\alpha)K(z) \Rightarrow P(\alpha) = (\alpha-\alpha)K(\alpha) = 0 \Rightarrow) :\ P(\alpha) = 0$. Division av $P(z)$ med $z - \alpha \Rightarrow P(z) = (z-\alpha)K(z) + r(z)$ men då grad$(z-\alpha) = 1$ och grad $r(z) <$ grad$(z-\alpha)$ så är grad $r(t) = 0$ dvs $r(z) = r$, konstant. Då fås $0 = P(\alpha) = (\alpha-\alpha)K(\alpha) + r = 0 + r = r \therefore P(z) = (z-\alpha)K(z)$ dvs $(z-\alpha)|P(z)$.