1. a) Kar.ekv. $0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \Rightarrow y_h = (C_1 + C_2x)e^{-x}$. Ansätt $y_p = ze^{-x} \Rightarrow e^{-x} = (D^2 + 2D + 1)(ze^{-x}) = (\text{Heaviside}) = e^{-x}((D-1)^2 + 2(D-1) + 1)z \Leftrightarrow D^2z = 1$. Ansätt $z = ax^2 + bx + c \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$ och välj $b = c = 0 \therefore y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x} \therefore y = y_h + y_p = (C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2})e^{-x}$, C_i konst.

   b) $x^2yy' = x^3\ln x + xy^2 \Rightarrow x > 0$ ty annars är $\ln x$ ej def. $\Rightarrow y' = \frac{x^3\ln x}{x^2y} + \frac{xy^2}{x^2y} = \frac{\ln x}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ eller $y = 0$, men $y = 0$ ej lösn. Sätt $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = xz' + z \Rightarrow xz' + z = \frac{\ln x}{z} + z \Rightarrow xz' = \frac{\ln x}{z}$, separabel $\Rightarrow z\,dz = \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow \int z\,dz = \int \frac{\ln x}{x}\,dx + C_1$ och $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} \therefore \frac{z^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C_1 \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 = z^2 = (\ln x)^2 + C \Rightarrow y^2 = x^2((\ln x)^2 + C)$

---

2. $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (-1,0,1) - (1,1,0) = (-2,-1,1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,-2,1) - (1,1,0) = (-1,-3,1)$. Planet π har normal $n_\pi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,5) \therefore \pi : 2x + y + 5z + D = 0$ och $P_1 \in \pi \Rightarrow 2 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \therefore \pi : 2x + y + 5z = 3$. Nu är $\overrightarrow{P_1Q} = (1,1,-6) - (1,1,0) = (0,0,-6)$ så avståndet mellan π och Q är $d = \frac{|n_\pi \cdot \overrightarrow{P_1Q}\,|}{|n_\pi|} = \frac{|(2,1,5)(0,0,-6)|}{\sqrt{30}} = \frac{|-30|}{\sqrt{30}} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}$ Linjen ℓ genom Q och $\perp \pi$ ges av $\ell : (x,y,z) = Q + t\frac{n_\pi}{|n_\pi|} = \left(1 + \frac{2t}{\sqrt{30}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{30}}, -6 + \frac{5t}{\sqrt{30}}\right)$ vars skärning med π ges av insättning i ekv. för $\pi \Rightarrow 2\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{30}}\right) + 1 + \frac{t}{\sqrt{30}} + 5\left(-6 + \frac{5t}{\sqrt{30}}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{30t}{\sqrt{30}} = 30 \Leftrightarrow t = \sqrt{30}$ $\therefore$ Sökta planet innehåller punkten $Q - \sqrt{30}\frac{n_\pi}{|n_\pi|} = (1,1,-6) - \sqrt{30}\frac{(2,1,5)}{\sqrt{30}} = (-1,0,-11)$ $\therefore$ Ekv. för sökta planet: $2x + y + 5z + \tilde{D} = 0$ och $-2 - 55 + \tilde{D} = 0 \Rightarrow \tilde{D} = 57 \therefore$ Ekv. sökt plan: $2x + y + 5z = -57$.

---

3. Euler och $x > 0 \Rightarrow$ sätt $x = e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Big) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dt}\Big) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\Big) = -\frac{2}{x^3}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big)$ och $\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dt^2}\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dt}\Big) = \frac{d^3y}{dt^3}\frac{dt}{dx} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\Big(\frac{d^3y}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2}\Big) \therefore x^3\frac{d^3y}{dx^3} = -2\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) + \Big(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\Big) = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$.

   Sätt $D = \frac{d}{dt}$, som ger att differentialekvationen $\Leftrightarrow D^3y - 3D^2y + 2Dy + 6(D^2y - Dy) + 11Dy + 5y = 0 \Leftrightarrow D^3y + 3D^2y + 7Dy + 5y = 0$. Kar.ekv: $0 = r^3 + 3r^2 + 7r + 5 = (r+1)(r^2 + 2r + 5)$ så $r_1 = -1, r_{2,3} = -1 \pm 2i \;\therefore y(t) = C_1e^{-t} + e^{-t}(C_2\cos 2t + C_3\sin 2t) = \frac{1}{x}(C_1 + C_2\cos(2\ln x) + C_3\sin(2\ln x))$, C_i konst.

---

4. Definition: En matris B s. a. $AB = BA = I$ kallas en invers matris till A.

   Sats: Om A är inverterbar så är en invers till A entydigt bestämd.

   Bevis: Antag att B och C är inversa matriser till A, dvs $\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases} \therefore C = CI = C(AB) = CAB = (CA)B = IB = B$; dvs $C = B$, så invers entydig.