Matematiska Institutionen
CHALMERS & GU

Extrauppgift 2

a) Beräkna $\log(1+i)^3$.

b) Lös ekvationen $2z^4 - (\sqrt{3}+3i)z^2 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

Repetitionsfrågor

Vad är $Re z$ resp. $Im z$ för ett komplext tal z? Låt z_1, z_2 vara komplexa tal. Visa att $z_2 - z_1$ är den enda lösningen till ekvationen $z + z_1 = z_2$. Definiera $|z|$. Visa att $|z|^2 = z\bar{z}$, $|Re\ z| \leq |z|$, $|Im\ z| \leq |z|$ och $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Formulera och bevisa triangelolikheten för komplexa tal. Triangelolikheten ger en uppskattning uppåt av $|z_1 + z_2|$. Ge en uppskattning **nedåt** av $|z_1 + z_2|$. Vad betyder geometriskt addition och subtraktion av två komplexa tal? Vad betyder geometriskt $|z|$? Vad menas med den polära framställningen av ett komplext tal? Definiera $\arg z$. Vad betyder geometriskt multiplikation och division av två komplexa tal? Definiera $e^{i\theta}$ då $\theta \in \mathbf{R}$. Bevisa att $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Formulera och bevisa Moivres formel. Formulera och bevisa Eulers formler. Definiera e^z för z komplext tal. Visa att för komplexa tal gäller $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Visa att $\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ för komplext tal α och reellt x. Definiera $\log z$ för komplext z. Vad menas med ett komplext polynom? Formulera divisionsalgoritmen för polynom. Vad är innebörden av att polynomet $P(z)$ är delbart med polynomet $Q(z)$? Formulera Algebrans Fundamentalsats. Formulera och bevisa Faktorsatsen. Formulera och bevisa satsen om konjugerat komplexa rötter. Visa att för ett reellt polynom finns en faktorisering i reella polynom av högst andra graden. Formulera och bevisa satsen om rationella rötter till en ekvation med heltalskoefficienter. Vilka av följande påståenden är sanna resp. falska? Motivera svaren! **a)** Varje reell tredjegradsekvation har minst en reell rot. **b)** Varje reell fjärdegradsekvation har minst två reella rötter. **c)** Varje rationell rot till en ekvation $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ med heltalskoefficienter är själv ett heltal. **d)** Varje algebraisk ekvation med heltalskoefficienter har minst en rationell rot. **e)** Om P är ett polynom och P' dess derivata, så är varje enkelrot till ekvationen $P'(z) = 0$ en dubbelrot till ekvationen $P(z) = 0$.

Extrauppgifter

- Visa att om r_1 och r_2 är rötter till ekvationen $z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ så gäller att $r_1 + r_2 = -a_1$ och $r_1 r_2 = a_0$.
- Formulera och visa ett analogt påstående för en tredjegradsekvation $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ med (tre) rötter z_1, z_2, z_3.
- Låt $P(z)$ vara ett polynom. Division av $P(z)$ med $P'(z)$ ger $P(z) = (az+b)P'(z) + R(z)$. Visa att om α är en multipelrot så är $R(\alpha) = 0$.
- Använd resultatet i föregående övning till att lösa ekvationen $z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 20z - 12 = 0$.
- Antag att polynomet $P(z)$ har nollstället α med multiplicitet k. Visa att om $k > 1$ så är α nollställe av multiplicitet $k-1$ till derivatan $P'(z)$. Om $k = 1$ så är α inte nollställe till $P'(z)$.
- Visa att $\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{2k\pi i/n}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$.