1 Några olikheter för integraler

Sats 1 ((Del av Sats 5; PB, sid. 292)) *Antag att f, g kontinuerliga på intervallet $[a, b]$. Då gäller, med α en konstant, att*

i) $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$

ii) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

iii) $f(x) \leq g(x)$ *i* $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx,$

iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Bevis. Satsen är alltså specialfallet av Sats 5; PB, sid. 292, när funktionerna är kontinuerliga; då är enligt Sats 3, PB sid. 288, funktionerna f, g och $f + g$ integrerbara på intervallet $[a, b]$, dvs integralerna $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ och $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ existerar. Vi bevisar ii) och iii); i) och iv) bevisas på liknande (enklare) vis. Låt $\Delta x_k \equiv x_k - x_{k-1}$.

För ii) noterar vi att Sats 4, PB sid. 290, ger att $\sum_{k=1}^n (f(\xi_k)+g(\xi_k))\Delta x_k \to \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$. Vidare gäller med ytterligare en tillämpning av Sats 4, att $\sum_{k=1}^n (f(\xi_k) + g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + g(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. Alltså gäller $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$, ty gränsvärden är unika. Detta bevisar ii). För iii); antag att $f \geq 0$ och $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Enligt Sats 4 (återigen), gäller då $0 \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,dx < 0$, vilket är en motsägelse så $\therefore \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Låt nu $h(x) \equiv g(x) - f(x) \geq 0$. Då gäller enligt det vi precis bevisade, att $0 \leq \int_a^b h(x)\,dx$ och enligt ii) och i) gäller $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b (-f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$. Följdaktligen gäller $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$; dvs iii) är bevisad. □

2 Ytterligare om generaliserade integraler

Vi vill kunna hantera också den situation då integranden i en generaliserad integral inte nödvändigtvis är icke-negativ; notera att Jämförelsesatsen (PB, Sats 11, sid. 306) förutsätter att integranderna är icke-negativa.

Det är inte svårt att se att med våra definitioner så gäller att om $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ båda är konvergenta så är $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$, där α, β är konstanter, också konvergent (ty $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x))\,dx$ och gränsvärdet av en summa är summan av gränsvärdena). Detta faktum använder vi nu i beviset av

Sats 2 (Satsen om absolutkonvergens) *Om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent så är också $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.*

Bevis. Bilda hjälpfunktionerna $g(x) \equiv \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ och $h(x) \equiv \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$. Då $0 \leq g(x) \leq |f(x)|$ och $0 \leq h(x) \leq |f(x)|$ så följer av Jämförelsesatsen att integralerna $\int_a^b g(x)\,dx$ och $\int_a^b h(x)\,dx$ båda är konvergenta. Då är enligt resonemanget ovan, också $\int_a^b (g(x) - h(x))\,dx$ konvergent; dvs $\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent ty $f(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) + \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) = g(x) - h(x)$. □

Definition 1 Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ kallas absolutkonvergent om integralen $\int_a^b |f(x)|\,dx$ är konvergent.

Med denna terminologi kan alltså Satsen om absolutkonvergens uttryckas som att integralen är konvergent om den är absolutkonvergent. Omvändningen till detta påstående gäller ej i allmänhet; det finns funktioner $f(x)$ sådana att $\int_a^b |f(x)|\,dx$ är divergent men $\int_a^b f(x)\,dx$ är konvergent, t ex den s k *Dirichlets integral*, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

3 Lite om komplexa funktioner

3.1 Polynomekvationer

Anledningen, eller snarare en anledning, till att studera komplexa tal är att rötterna till ett godtyckligt polynom med reella koefficienter finns bland de komplexa talen; det motiverande exemplet är $x^2 = -1$. Dessutom visar det sig att om vi tittar på den större mängden av polynom med komplexa koefficienter så gäller fortfarande att rötterna till ett sådant polynom är komplexa tal; vi behöver inte utvidga talmängden ytterligare för att kunna lösa alla polynom med komplexa koefficienter. Detta är Algebrans Fundamentalsats; en av matematikens milstolpar.

Dock kan det vara svårt att 'hitta' rötterna till en polynomekvation. För ett andragradspolynom $p(x) = 0$ kan vi ju enkelt kvadratkomplettera och få en 'lösningsformel' för rötterna till $p(x) = 0$. Det finns ej motsvarande lösningsformler för femtegradsekvationer och högre ordningens ekvationer. Detta är en annan utav matematikens milstolpar; det som kallas Galoisteori efter sin upptäckare E. Galois. Även om det finns lösningsformler för tredje- och fjärde-gradsekvationer så tar vi inte upp det här i kursen utan använder oss av att 'gissa' rötter. Självklart är det inte alltid en framkomlig väg och i praktiken använder man sig av numeriska metoder, t ex Newton-Raphson. Vårt verktyg här för att hjälpa oss att gissa eventuella enkla, rationella, rötter är Sats 4, **PB** 1.4, sid. 54:

Sats 3 *Låt* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *vara ett polynom med heltalskoefficienter och låt* $\alpha = p/q$ *vara ett rationellt tal skrivet så att heltalen* p *och* q *saknar gemensamma faktorer (förutom* ± 1*). Om* α *är en rot till ekvationen* $f(x) = 0$ *så måste* p *vara en faktor i* a_0 *och* q *en faktor i* a_n*.* □

Observera att satsen *inte* säger att det måste finnas en rationell rot utan bara att *om* det finns en rationell rot så delar täljaren p i en sådan rot lägstagradstermen a_0 och, osv ... . T ex så vet vi ju sedan tidigare att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. Detta ser vi också m h a denna sats:

Ex: Talet $\sqrt{2}$ är det positiva tal som löser ekvationen $x^2 - 2 = 0$. Detta är ju en ekvation som satsen är tillämplig på. De enda rationella rötterna p/q till denna ekvation är enligt satsen $p/q = \pm 1/\pm 1,\ \pm 2/\pm 1 = \pm 1,\ \pm 2$ men inget av dessa är en rot till ekvationen. Så ekvationen har inga rationella rötter och speciellt kan då ej $\sqrt{2}$ vara rationellt. □

3.2 Komplexa exponentialfunktionen

Vi definierade för $z = x + iy \in \mathbb{C}$ den komplexa exponentialfunktionen enligt $e^z \equiv e^x e^{iy}$ där $e^{iy} \equiv \cos y + i \sin y$, se **PB**, A7, sid. 457. Med denna definition uppfyller e^z egenskaperna för en exponentialfunktion, $e^{z+w} = e^z e^w$; Sats 7, **PB**, A7, sid. 457. Dessutom får vi från Ex 26, **PB**, avsnitt 3.7, sid. 211, att $De^{wx} = \frac{d}{dx}(e^{wx}) = we^{wx}$ för $w \in \mathbb{C}$ och $x \in \mathbb{R}$. Dvs, det verkar vettigt att definiera

$$\int e^{wx}\,dx = \frac{1}{w}e^{wx} + C. \tag{1}$$

Det är också vettigt men det är inte fullkomligt självklart att det ska se ut så här ty detta innebär att vi ger mening åt integralen av en komplexvärd funktion och det har vi inte gjort tidigare; så låt oss behandla det. Det är fullkomligt naturligt att göra följande definition:

Definition 2 (PB, sid. 211) Låt f vara en komplexvärd funktion så att $f(x) = u(x) + iv(x)$ där u, v reellvärda funktioner, $(u(x) = \mathrm{Re} f(x)$, $(v(x) = \mathrm{Im} f(x))$. Då definierar vi derivatan $f'(x)$ enligt $f'(x) \equiv u'(x) + iv'(x)$. Vidare kan vi ge mening åt $\int u(x)\,dx$ och $\int v(x)\,dx$. och vi kan då definiera

$$\int f(x)\,dx \equiv \int u(x)\,dx + i \int v(x)\,dx.$$

Vi ser att med denna naturliga definition så gäller gäller även för en komplexvärd funktion det vi förväntar oss, nämligen

$$\int f'(x)\,dx = \int u'(x)\,dx + i \int v'(x)\,dx = u(x) + iv(x) + C = f(x) + C.$$

Följdaktligen gäller för $w \in \mathbb{C}$, eftersom $\frac{d}{dx}(e^{wx}) = we^{wx}$, att

$$\int e^{wx}\,dx = \int \frac{d}{dx}(\frac{1}{w}e^{wx})\,dx = \frac{1}{w}e^{wx} + C,$$

dvs (1) gäller.

Vi har tidigare sett att den reella exponentialfunktionen $e^x,\ x \in \mathbb{R}$ har en invers, logaritmfunktionen ln. En naturlig fråga är om också den komplexa exponentialfunktionen $e^z,\ z \in \mathbb{C}$ har en invers. Svaret är lite mer komplicerat än för den reella exponentialfunktionen och vi ska vara mycket kortfattade om detta. Mer om detta får man läsa i en kurs i komplexanalys.

Vi noterar att om $z \in \mathbb{C}$ och

$$e^z = a \in \mathbb{C} \tag{2}$$

så gäller att även $e^{z+in2\pi} = e^z e^{in2\pi} = e^z = a$ där $n \in \mathbb{Z}$, ty $e^{in2\pi} = \cos(n2\pi) + i\sin(n2\pi) = 1 + i0 = 1$. Naturligen betecknar vi de z som uppfyller (2) med $\log(a)$, dvs $\log(a) = \{z \in C : e^z = a\}$. Problemet är alltså att denna mängd i motsats till fallet med en reell exponentialfunktion då $\log(a) = \{z \in R : e^z = a\}$, inte består av endast ett element utan innehåller oändligt många, $z + in2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Alltså är log inte en funktion utan en *flervärd* 'funktion', dvs $\log a$ är inte ett entydigt bestämt tal, så en invers saknas i egentlig mening. Vi ska dock ändå prata om en (mångvärd) 'invers', som vi alltså kallar $\log z$, till $e^z,\ z \in C$.

För detta noterar vi att genom att skriva $a \in \mathbb{C}$ på polär form, $a = |a|e^{i\arg a}$, får vi med $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ att $e^x e^{iy} = e^z = a = |a|e^{i\arg a}$ så att

$$\begin{cases} e^x = |a| \\ y = \arg a + n2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|a| \\ y = \arg a + n2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

och därför gäller $z = x + iy = \ln|a| + i(\arg a + n2\pi),\ n \in \mathbb{Z}$. Vi gör följande definition:

Definition 3 *För* $a \in \mathbb{C}$ *låter vi* logaritmen av a *vara det mångvärda uttryck som ges av,*

$$\log a = \{z \in \mathbb{C} :\ e^z = a\} = \ln|a| + i(\arg a + n2\pi),\ n \in \mathbb{Z}.$$

□

Ex: För $-i$ har vi $|-i| = 1,\ \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ så $\log(-i) = \ln 1 + i(-\frac{\pi}{2} + n2\pi) = i\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$. □

Ex: Finn de $z \in \mathbb{C}$ för vilka $e^z = -1$. Vi ser att dessa z ges av 'inversen' av funktionen e^z i punkten -1, dvs de ges av $z = \log(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + n2\pi) = \ln 1 + i(\pi + n2\pi) = i\pi(2n+1)$ för $n \in \mathbb{Z}$. □

Observera att den komplexa logaritmfunktionen **inte** kan användas helt analogt med dess reella variant och utan ytterligare teori bör den undvikas i vissa sammanhang. Så skulle man ju kunna tänka sig att använda den komplexa logaritmen $\log(x - i)$ som primitiv funktion till $1/(x - i)$ men det förutsätter mer teori än vi tar upp här och därför använder vi *definitionen* av integralen av en komplex funktion när vi ska beräkna integralen av $1/(x - i)$:

Ex: $\int_0^1 \frac{1}{x-i}\,dx = \int_0^1 \frac{x+i}{(x+i)(x-i)}\,dx = \int_0^1 \frac{x+i}{x^2+1}\,dx =$ (enligt definition) $= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + i\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^1 + i[\arctan x]_0^1 = \ln\sqrt{2} + i(\pi/4)$. $\square$