Kort om Linjär Algebra

7 december 2003

1. Linjära ekvationssystem, matrisformulering och eliminationsmetoden

I teknik och naturvetenskap modelleras ofta verkligheten m h a differentialekvationer och grafen för lösningar till dessa ekvationer anses utgöra lösningar till problemet som avses att modelleras. Oftast är dessa ytor ickelinjära, ej plan, och komplicerade. En tankegång är då att man lokalt vid en punkt på lösningsytan kan approximera lösningen med ytans tangentplan i punkten. Detta ger, i $\mathbb{R}^3$, upphov till en ekvation, planets ekvation, av typen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

där a_{1i} och b_1 är konstanter. Mer allmänt får man vid approximation av sitt ursprungliga problem (som kan modelleras av flera ekvationer) ett system av ekvationer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 &= b_m. \end{cases}$$

Dessutom är det oftast fler fler variabler i ekvationerna; ett uttryck $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1$ motsvarar ett (hyper)plan i $\mathbb{R}^n$. Här är $\mathbb{R}^n$ den naturliga generaliseringen av $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$:

Definition 1.1.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}^1,\ i = 1, \dots, n\}.$$

För mängden $\mathbb{R}^n$ av n-tipler har vi de naturliga generaliseringarna av (term- eller fack-vis) addition och multiplikation med en skalär $\alpha \in \mathbb{R}$: för $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n)\ \in \mathbb{R}^n$ definierar vi

i) $x + y \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$,

ii) $\alpha x \equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$.

Det allmänna fallet av ett linjärt ekvationssystem är ett system med m ekvationer och n variabler (eller obekanta) där a_{ij} och b_i betraktas som kända konstanter:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vi säger att ekvationssystemet år *homogent* om alla $b_i = 0$, annars *inhomogent*. En lösning till ekvationssystemet är en uppsättning tal x_i s a de m ekvationerna i ekvationssystemet är uppfyllda; d v s $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ är en lösning till ekvationssystemet.

Som antytt ovan leder modellerandet av komplicerade problem på ett naturligt sätt till stora (många variabler, många ekvationer) linjära ekvationssystem och om modellerandet ska vara användbart behöver man kunna lösa de resulterande ekvationssystemen effektivt. Själva lösandet är i en viss mening enkelt men svårigheten är ofta den stora komplexiteten (många variabler, många ekvationer). Det är då av stort värde att ha ett notationssystem som är lättöverskådligt och lätthanterligt. Ett sådant notationssystem ges m h a *matriser*, talscheman, som definieras av koefficienterna hos ekvationerna i ett linjärt ekvationssystem. De okända variablerna som sökes som lösningar är ju just okända och vad man notationsmässigt kallar dem är av underordnad betydelse. Därför behöver man ofta inte explicit ange dem utan ekvationssystemet bestäms helt av koefficienterna i ekvationerna.

Exempel 1.1. Ekvationen $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1$ kan ju ses som ett ekvationssystem och kan med matrisnotation skrivas som $(a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \mid b_1)$. Om högerledet $b_1 = 0$ så blir matrisnotationen $(a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \mid 0)$ och man brukar då bara ange koefficientmatrisen $(a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$ och med detta mena ekvationssystemet med högerled $= 0$.

□

Exempel 1.2. Ett allmänt ekvationssystem med m ekvationer, n variabler och högerled b_i, $i = 1, \ldots, m$, d v s ekvationssystemet i (1.1) ovan, anges på matrisform som

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.2}$$

□

Sådana rektangulära talscheman kallas *matriser*. Det lodräta strecket är oegentligt och används bara för att markera att sista elementet i varje rad inte är en koefficient för en variabel utan är högerledet för respektive ekvation i ekvationssystemet. Ofta delar man upp matrisen i (1.2) för ekvationssystemet i (1.1) som

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

så att matrisen i (1.2) är $\mathcal{M} \equiv (A|b)$. Matrisen A kallas *koefficientmatris* för ekvationssystemet i (1.1) och b kallas *högerledsmatris*. Matrisen A har m *rader* och n *kolonner* och sägs ha *typen* $m \times n$; skrivet typ(A)=$m \times n$. Matrisen b har alltså typ $m \times 1$ och $\mathcal{M}$ är (utan det lodräta strecket) en matris av typ $m \times (n+1)$ och denna matris kallas *utvidgad koefficientmatris* eller *totalmatris*. En matris A skrivs som $A = (a_{ij})$ där talen a_{ij} kallas matrisens *element* och ofta skrivs detta också $A_{ij} = a_{ij}$. En matris kallas *kvadratisk* om den är av typ $n \times n$ för något positivt heltal n.

Totalmatrisen extraherar alltså det som är väsentligt för lösandet av ett ekvationssystem och vid lösandet av ett ekvationssystem är det alltså bara dessa matriser man behöver arbeta med. Det helt generella och viktigaste sättet att lösa ekvationssystem kallas *eliminationsmetoden* eller *Gausselimination*, eftersom det innebär ett successivt eliminerande av obekanta från rader i ekvationssystemet. Detta eliminerande är fullt systematiskt och kan lätt implementeras i ett datorprogram. Idén i eliminationsmetoden är att successivt förenkla ekvationssystemet genom att i successiva ekvationer eliminera obekanta på ett sådant sätt att man erhåller ett ekvivalent ekvationssystem, d v s ett ekvationssystem med samma lösningar. Det viktigaste momentet i denna metod vilar på det enkla faktum att om vi har två ekvationer i vårt ekvationssytem, d v s två likheter som de obekannta variablerna uppfyller, och adderar vänsterled respektive högerled i dessa två ekvationer så får vi en ny ekvation som de obekanta uppfyller, t ex:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 2y & = & 3 \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Addition av de två ekvationerna i detta ekvationssystem ger $3x - y = x + y + 2x - 2y = 1 + 3 = 4$, d v s den nya ekvationen $3x - y = 4$ som x och y också uppfyller om x och y uppfyller ekvationerna i (1.3). Dessutom kan vi ju byta ut en av ekvationerna, t ex den andra, i (1.3) mot denna nya ekvation ty genom att dra den första ekvationen i (1.3) från den nya så gör vi ju ogjort det som vi gjorde för att få den nya ekvationen. D v s, vi kan återskapa vårt ursprungliga ekvationssystem från det nya, d v s

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 2y & = & 3 \end{array} \right.$$

och

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array} \right. \tag{1.4}$$

är ekvivalenta utsagor (kom ihåg att vi kan skriva det m h a $\Leftrightarrow$), d v s de är sanna samtidigt, d v s ekvationssystemen har samma lösningar.

Nu ser vi ju att vi i det nya ekvivalenta ekvationssystemet (1.4) egentligen inte åstadkommit någon direkt förenkling, det är ju bara annorlunda (men med samma lösning(ar)); vi har ju inte lyckats eliminera någon obekant ur någon av ekvationerna. För att åstadkomma detta skulle vi ju istället kunnat i ett första steg t ex ha multiplicerat första ekvationen, $x + y = 1$, i det ursprungliga ekvationssystemet (1.3) med 2 och erhålla $2x + 2y = 2$. Vi noterar att vi också kan 'gå tillbaka' från denna ekvation, $2x + 2y = 2$, till den ursprungliga, $x+y = 1$, genom att multiplicera med 1/2. Observera dock att om vi multiplicerar med 0 stället för 2 så får vi inte en ekvivalent ekvation ty vi kan inte 'gå tillbaka'; multiplikation med 0 ger $0 = 0$ och från denna ekvation som ju är trivialt sann vad x och y än är, kan vi inte återskapa $x+y = 1$, som ju inte är sann för alla x och y. Vi ser att vi *ej* får multiplicera en ekvation med 0 i vårt lösande av ekvationssystemet.

Vi ser alltså att

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 2y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y & = & 2 \\ 4x & & & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 4x & & & = & 5 \end{array}\right.$ där vi i de olika ekvivalenserna först multiplicerat första ekvationen med 2, sedan lagt första ekvationen (i det andra ekvationssystemet) till den andra ekvationen och slutligen (i det tredje ekvationssystemet) multiplicerat första ekvationen med 1/2. Självklart kan vi förenkla lösandet genom att 'slå samman' dessa steg till

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & 2y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 4x & & & = & 5 \end{array}\right.$$

där vi helt enkelt multiplicerat första ekvationen i det ursprungliga ekvationssystemet (1.3) med 2 och lagt resultatet till den andra ekvationen. Så att multiplicera en ekvation i ekvationssystemet med en konstant och lägga det till en annan ekvation i systemet skapar ett ekvivalent ekvationssystem. Observera att vi ju kan multiplicera en ekvation med 0 *och* lägga resultatet (d v s 0=0) till en annan ekvation och få ett ekvivalent ekvationssystem, men vi får *inte* ett ekvivalent ekvationssystem om vi multiplicerar en ekvation i ekvationssystemet med 0 och behåller det resultatet (d v s 0=0), som är en nollrad.

Det är nu lätt att lösa ut x ur sista ekvationen genom att multiplicera ekvationen med 1/4. Sedan kan vi 'bakåtsubstituera' d v s ersätta förekomsten av x i ekvationer som står ovanför och då enkelt i första ekvationen lösa ut y. Detta ger ju möjlighet att lösa ekvationssystemet men det ger ändå inte ett enkelt helt systematiserat lösande. För att uppnå detta vill vi att koefficientmatrisen ska vara uppåt triangulär ovanför huvuddiagonalen (från övre vänstra hörnet till nedre högra) istället för som i vårt fall uppåt triangulär ovanför den andra diagonalen. (Anledningen, förutom att det känns naturligare, är att man ej behöver skilja på koefficientmatris och totalmatris då vi (strax) kommer att prata om s k pivotelement.) För att åstadkomma en sådan lösning multiplicerar vi första ekvationen i vårt ursprungliga ekvationssystem med -2 och lägger resultatet till den andra ekvationen i det ursprungliga ekvationssystemet, d v s

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \quad \boxed{-2} \\ 2x & - & 2y & = & 3 \quad \leftarrow \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ & & -4y & = & 1 \end{array}\right.$$

Använder vi matrisnotation för detta får vi

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \boxed{-1/4} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{-1} \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right)$$

så $x = 5/4$, $y = -1/4$. Här använder vi $\overset{RE}{\sim}$ med betydelsen (rad)ekvivalent.

Idén i Gausselimination är alltså att överföra ekvationssystemet till ett ekvivalent ekvationssystem på (uppåt) trappstegsform (eller (uppåt) triangulär form):

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right)$$

För att kunna utföra en Gausselimination som ovan och överföra ekvationssystemet till ett ekvivalent ekvationssystem på trappstegsform behöver man ibland byta plats på raderna i ekvationssystemet. Det förändrar ju naturligtvis inte lösningsmängden till ekvationssystemet:

Exempel 1.3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -\,x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

varifrån vi lätt kan lösa ekvationssystemet med 'bakåtsubstitution'. □

Vi gör nu följande definitioner baserade på diskussionen ovan:

Definition 1.2. *En* elementär radoperation *på en matris är någon av de följande tre operationerna:*

i) byta plats på två rader,

ii) multiplikation av en rad med en konstant $\neq 0$*,*

iii) addition av en konstant gånger en rad till en annan rad.

Definition 1.3. *Matriserna* $\mathcal{M}_1$ *och* $\mathcal{M}_2$ *kallas* radekvivalenta*, betecknat* $\mathcal{M}_1 \overset{RE}{\sim} \mathcal{M}_2$*, om* $\mathcal{M}_1$ *kan överföras i* $\mathcal{M}_2$ *genom en följd av elementära radoperationer.*

Definition 1.4. Pivotelementet *för en rad i en matris är det första elementet* $\neq 0$ *i raden. En rad med bara nollor saknar pivotelement. En matris har* trappstegsform *om varje pivotelement står till höger om pivotelementen i de föregående raderna.*

Definition 1.5. Rangen *för en matris* $\mathcal{M}$ *är antalet pivotelement i en trappstegsmatris som är radekvivalent med* $\mathcal{M}$*.*

Vi observerar att radekvivalenta matriser har samma rang; $\mathcal{M}_1 \overset{RE}{\sim} \mathcal{M}_2 \Rightarrow rang(\mathcal{M}_1) = rang(\mathcal{M}_2)$.

Exempel 1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A har ej trappstegsform men är radekvivalent med matrisen B. Matrisen B har pivotelement $2, 5, -1$, är trappstegsformad och har $rang(B) = 3$. Matrisen A har rang=3. □

Vi löser följande exempel m h a matrisformulering och elementära radoperationer.

Exempel 1.5.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & & +2x_5 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{cc} \boxed{-1} & \boxed{-3} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Ekvationssystemets totalmatris är nu trappstegsformad. □

Definition 1.6. *Variabler som hör till pivotelementen i en trappstegsmatris kallas* bundna *och övriga variabler kallas* fria.

Lösningen till ekvationssystemet får vi genom att ge de fria variablerna godtyckliga (parameter)värden och därefter en efter en lösa ut de bundna i termer av de fria, nerifrån och upp:

Exempel 1.5. (forts.) Variablerna x_1, x_2 och x_4 är bundna och x_3 och x_5 är fria. Sätt då $x_3 = s$, $x_5 = t$ där $s, t \in \mathbb{R}$ godtyckliga. Vi får då för de bundna att $-x_4 = -2 \Leftrightarrow x_4 = 2$, $x_2 = x_3 + x_4 - x_5 = s + 2 - t$, $x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 + s + 2 - t - 2s - 2 = 1 - s - t$ $\therefore$ Lösningarna ges av $x = (x_1, \ldots, x_5) = (1 - s - t, s + 2 - t, s, 2, t) = (1, 2, 0, 2, 0) + s(-1, 1, 1, 0, 0) + t(-1, -1, 0, 0, 1)$, d v s det finns oändligt många lösningar. $\square$

Vi noterar att i det senaste exemplet så är antalet variabler > antalet ekvationer. Vi betraktar nu en analog situation: ett ekvationssystem med tre variabler och två ekvationer, som vi kan uppfatta som två plan i rummet, $\mathbb{R}^3$.

Två plan i rummet är antingen parallella (d v s det finns ingen lösning till ekvationssystemet bestående av ekvationerna för dessa två plan) eller så skär planen planen varandra och skärningsmängden är en linje (d v s det finns oändligt många lösningar till ekvationssystemet). Om vi lägger till ett eller flera plan (d v s en eller flera ekvationer till ekvationssystemet) så att vi har fler än tre plan, så kan ju de redan beskrivna situationerna åter uppträda (ty det tredje planet kan ju vara parallellt med de tidigare två parallella planen, eller skärningslinjen för de två första planen ligger i det tredje planet) men även ett tredje fall kan uppträda; nämligen linjen som utgör skärningen mellan de två första planen skär det tredje planet i precis en punkt (d v s ekvationssystemet har precis en (d v s en entydig) lösning).

Vi ser alltså att ett ekvationssystem med tre obekanta, som kan uppfattas som ett antal plan i rummet, har antingen ingen, precis en eller oändligt många lösningar. I fallet med ett ekvationssystem med n obekanta kan vi med hjälp av matrisformuleringen och Gausselimination se att detsamma gäller i detta fall; d v s systemet har ingen, precis en eller oändligt många lösningar.

För att se detta konstaterar vi att totalmatrisen $(A|b)$ för ett ekvationssystem alltid via elementära radoperationer (som bevarar) lösningsmängden) kan överföras till trappstegsform. För att tydligare konstatera de olika fallen noterar vi vidare att en trappstegsmatris alltid via elementära radoperationer kan överföras till radreducerad form:

Definition 1.7. *En trappstegsmatris kallas* radreducerad *om* *i) alla pivotelement är 1,*

ii) alla element som står i samma kolonn som ett pivotelement är 0.

Exempel 1.5. (forts.) Vi såg att ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & & +2x_5 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \dots$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ och vidare radelimination ger}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \boxed{-1} \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \leftarrow \\ \leftarrow & \\ \boxed{1} & \boxed{-1} \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \boxed{1} \\ \\ \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

där denna sista matris är radreducerad. I en radreducerad (total)matris kan vi direkt lösa ut de bundna variablerna i termer av högerledet och de fria variablerna. Vi får som tidigare att variablerna x_1, x_2 och x_4 är bundna och x_3 och x_5 är fria. Sätt då $x_3 = s$, $x_5 = t$ där $s, t \in \mathbb{R}$ godtyckliga. Vi får då för de bundna att $x_4 = 2$, $x_2 = x_3 - x_5 + 2 = 2 + s - t$, $x_1 = 1 - x_3 - x_5 = 1 - s - t$ $\therefore$ Lösningarna ges som tidigare (naturligtvis, fast på ett enklare vis) av $x = (x_1, \dots, x_5) = (1 - s - t, s + 2 - t, s, 2, t) = (1, 2, 0, 2, 0) + s(-1, 1, 1, 0, 0) + t(-1, -1, 0, 0, 1)$, d v s det finns oändligt många lösningar. $\square$

Vi konstaterar alltså att en totalmatris $(A|b)$ för ett ekvationssystem med n obekanta och m ekvationer via elementära radoperationer (som bevarar lösningsmängden) kan överföras till trappstegsform och även till radreducerad form.

Om i denna radreducerade matris, sista kolonnen (motsvarande högerledet i ekvationssystemet) innehåller ett pivotelement (som alltså är 1 eftersom totalmatrisen inte bara är på trappstegsform utan t o m radreducerad) så är elementen i samma rad till vänster om pivotelementet, alla noll. Dessa nollelement är ju koefficienterna för variablerna $x_1, \; x_2, \; \dots, x_n$ så vi har att för $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ ska gälla att $0 = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ vilket ju inte är sant oavsett vad $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ är. D v s, ekvationen är *ej* uppfylld oavsett vad $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ är, d v s det finns inga lösningar i detta fall.

Om tvärtom sista kolonnen ej innehåller något pivotelement så kan vi alltid lösa ut de bundna variablerna i termer av högerledet (d v s sista kolonnen i den radreucerade totalmatrisen) och de fria variablerna. Helt klart gäller att $0 \leq$ antalet fria variabler $\leq n$, där $n =$ antalet variabler. Vidare är antalet fria variabler = antalet variabler - antalet bundna variabler. Låt $r =$ rangen $=$ antalet pivotelement $=$ antalet bundna variabler. Då gäller alltså $0 \leq n - r \leq n$ där antalet fria variabler = n-r. Om $n - r > 0$ så finns fria variabler och därmed oändligt många lösningar till ekvationssystemet, en (n-r)-parameter familj. Om $n - r = 0$ så är alltså $r = n$, d v s varje kolonn i koefficientmatrisen innehåller ett pivotelement, d v s det finns då en entydig lösning.

Vi har alltså sett att

Sats 1.8. (Huvudsats om lösningar till ett linjärt ekvationssytem) *Låt ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer och n variabler (eller oberoende) ha totalmatris $(A|b)$. Då kan ekvationssystemet*

i) sakna lösningar,

ii) ha oändligt många lösningar; (om r=rang(A)< n och då ges lösningarna av en (n-r)-parameter familj),

iii) ha precis en lösning; (om rang(A)= n).

Speciellt noterar vi att om högerledet $b = 0$ så finns (minst) en lösning (ty $x = 0$ är alltid en lösning om ekvationssystemet är homogent, och denna lösning kallas den triviala lösningen. (*OBS* att $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ bara är lösning om ekvationssystemet är homogent, d v s om högerledet är 0.) Om koefficientmatrisen A är av typ $m \times n$ med $m < n$ så gäller att $r = \text{rang}(A) \leq m < n$, så antalet fria variabler $= n - r > 0$ och därmed finns det oändligt många lösningar. Vi har alltså:

Följdsats 1.9. *Ett homogent linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.*

Övning 1.1. Lös följande ekvationssystem m h a totalmatrismetoden:

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ x-z &=& 2 \\ y+z &=& 1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -3x_3 &=& 3 \\ -2x_1 & -x_2 & &=& -4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 &=& 7 \end{array}\right.$$

$$c)\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & 4 \end{cases} \quad d)\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & +8x_3 & +9x_4 & +9x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +6x_5 & = & 0 \\ x_1 & & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} & -2b & +3c & = & 1 \\ 3a & +6b & -3c & = & -2 \\ 6a & +6b & +3c & = & 5 \end{cases} \quad f)\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -15 \\ 5x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & -3x_2 & +5x_3 & = & 41 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} & v & +3w & -2x & = & 0 \\ 2u & +v & -4w & +3x & = & 0 \\ 2u & +3v & +2w & -x & = & 0 \\ -4u & -3v & +5w & -4x & = & 0 \end{cases} \quad h)\begin{cases} & 10y & -4z & +w & = & 1 \\ x & +4y & -z & +w & = & 2 \\ 3x & +2y & +z & +2w & = & 5 \\ -2x & -8y & +2z & -2w & = & -4 \\ x & -6y & +3z & & = & 1 \end{cases}$$

Övning 1.2. Lös för alla värden på a ekvationssystemet $\begin{cases} x & +3y & +az & = & 13+2a \\ -2x & -5y & +z & = & -21 \\ -3x & -7y & +4z & = & -25 \end{cases}$

Finns det någon lösning med $xz + yz = 45$?

Övning 1.3. Finn de värden på parametrarna a och b för vilket följande ekvationssystem har entydig lösning; $\begin{cases} x & +7y & -6z & = & b \\ 2x & +3y & +z & = & 5 \\ 3x & -y & +az & = & 2 \end{cases}$ Lös ekvationssystemet för övriga a och b.

Övning 1.4. Avgör utan papper och penna vilka av följande ekvationssystem som har icke-triviala lösningar. a) $\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & +x_2 & -8x_3 & +9x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +8x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -8x_3 & = & 0 \\ & & 4x_3 & = & 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & = & 0 \\ 6x_1 & -4x_2 & = & 0 \end{cases}$

Övning 1.5. Beräkna rangen av följande matriser. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Övning 1.6. Ange en radreducerad trappstegsmatris som är radekvivalent med a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Matrisalgebra

Matriser är talscheman, bra bl a för att lösa ekvationssystem som vi såg i föregående kapitel. De är dock inte endast verktyg utan kan ges en egen struktur; vi kan med naturliga definitioner räkna med dem, d v s de kan fås att bilda en algebra.

2.1. Addition och multiplikation med en skalär

Vi behandlar först de rättframma operationerna addition och multiplikation med en skalär. Multiplikation behandlar vi i nästa avsnitt.

Definition 2.1. *Matriserna A och B är lika, betecknat $A = B$, om*

i) de har samma typ

ii) $A_{ij} = B_{ij}$ för alla i och j.

Exempel 2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \cos\pi \\ (-1)^2 & \tan(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ □

Exempel 2.2. Nollmatriser är matriser $A = (a_{ij})$ där alla element $a_{ij} = 0$, t ex $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Oftast brukar det framgå av sammanhanget vad typen för en matris är och då brukar man skriva nollmatriser med samma beteckning, 0. □

Definition 2.2. *Om A och B är matriser av samma typ och α en skalär (ett reellt eller komplext tal) så definierar vi*

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) \equiv (a_{ij} + b_{ij}), \quad \alpha A \equiv (\alpha a_{ij}).$$

Exempel 2.3. $-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

Exempel 2.4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$2A - B + \frac{1}{3}C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

□

Följande sats samlar räkneregler för matriser och då de är enkla att bevisa utelämnar vi beviset. Notera dock att det är underförstått att räknereglerna bara gäller när operationerna är definierade; t ex så måste ju A och B i satsen ha samma typ och x och y är skalärer. Vidare ska $0A = 0$ tolkas på det naturliga sättet, d v s en matris multiplicerat med skalären 0 har som resultat en nollmatris.

Sats 2.3. *i)* $A + B = B + A$ *v)* $(x + y)A = xA + yA$

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *vi)* $x(yA) = (xy)A$

iii) $A + 0 = 0 + A = A$ *vii)* $1A = A,\ 0A = 0$

iv) $A - A = 0$ *viii)* $x(A + B) = xA + xB$

Övning 2.1. Låt A och B vara matriserna i ex. 2.4. Beräkna a) $A+B$ b) $B-A$ c) $A-\frac{1}{2}B$ d) Lös ekvationen $2X - B = 2A$.

2.2. Matrismultiplikation

Vi har tidigare sett att ett ekvationssystem kan formuleras m h a matriser, totalmatris, koefficientmatris och högerledsmatris och att detta var ett praktiskt sätt när vi systematiskt via Gausselimination ska lösa ekvationssystemet. I föregående avsnitt såg vi att man kan definiera addition av matriser och multiplikation med en skalär. En naturlig fråga blir då om det går att definiera också en multiplikation av matriser; d v s om A och B matriser, kan vi ge mening åt AB? För att undersöka en eventuell mening av matrismultiplikation behöver vi se en enkel situation där man naturligt kan uppfatta situationen som en (matris)multiplikation.

Att lösa ett ekvationssystem, t ex

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases} \quad \text{där } a_{ij} \text{ och } b_i \text{ givna,} \tag{2.1}$$

innebär ju att undersöka om det finns några tal $x_1,\ x_2$ så att (2.1) blir uppfyllt och i så fall ange dessa $x_1,\ x_2$. En tanke är ju att sätta in alla möjliga x_1 och x_2 och se för vilka (om några) utsagan (2.1) blir uppfyllt. Detta är ju av en rad orsaker inte vidare praktiskt om ens möjligt, men värdet med denna tankegång är ju att man leds till att uppfatta ekvationssystemet som en funktion av x_1 och x_2. För x_1 och x_2 kan vi ju naturligen definiera en funktion, säg f, genom

$$f(x_1, x_2) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Argumentet (x_1, x_2) är ju ett talpar, d v s ett element i $\mathbb{R}^2$. Det 'är' ju också $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{pmatrix}$ om än skrivet på ett annorlunda vis, som en 2×1-matris eller en kolonnmatris. Det är dock klart att det finns en en-entydig avbildning mellan $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}$ och $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}\}$, d v s dessa två mängder är ur vissa aspekter 'lika', d v s de är *inte* lika men kan uppfattas som lika (i meningen att det finns en isomorfi mellan dem); det ena är ju en mängd av talpar (x_1, x_2) medan det andra är en mängd av kolonnmatriser $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Samma synsätt ger att vi kan uppfatta båda dessa mängder som 'lika' mängden $\{(x_1\ x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}$ av reella 1×2-matriser, en mängd av radmatriser.

Vi ser nu alltså att funktionen f definierad i (2.2) kan uppfattas som en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, en funktion definierad på $\mathbb{R}^2$ och som tar värden i $\mathbb{R}^2$, (OBS att funktionen naturligtvis inte behöver anta alla värden i $\mathbb{R}^2$; om t ex $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ så gäller ju att det enda värdet som funktionen antar är $(0, 0)$, origo.)

Frågan om existens av en lösning till (2.1) kan alltså formuleras som en fråga om huruvida det finns någon punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sådan att $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avbildas av funktionen f på elementet $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Definitionen av funktionen f kräver ju att vi explicit redovisar hur f är definierad i en punkt (x_1, x_2) så med detta synsätt blir det inte lika lätt att undertrycka variablerna som vi gjorde i matrisformuleringen av ekvationssystem. Båda dessa formuleringssätt för ett ekvationssystem har ju dock sina uppenbara värden och vi vill gärna kombinera dessa synsätt. För att göra detta behöver vi alltså behålla variablerna och formulera dem m h a en matris, vilket ju är lätt gjort som t ex radmatrisen $(x_1\ x_2)$ eller kolonnmatrisen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Då högerledet är formulerat m h a en kolonnmatris (som alltså är vår formulering av $\mathbb{R}^2$) så är det naturligt att för $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ också välja kolonnnotationen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Frågan blir då hur vi representerar f m h a matrisnotation; vi vill kunna se förekomsten av variabeln $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ direkt i beskrivningen av funktionen.

Låt oss härför betrakta ett 'ekvationssystem' bestående av endast *en* ekvation,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

med en koefficientmatris som är radmatrisen $(a_{11}\ a_{12})$ och där vänsterledet kan uppfattas som en funktion $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad genom $f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$. Vi såg ovan att talen x_1, x_2 lämpligen då skrivs som en kolonnmatris, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Vidare noterar vi att m h a skalärprodukten, $\cdot$, kan vi skriva $f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = (a_{11}, a_{12}) \cdot (x_1, x_2)$ där vi vill skriva (a_{11}, a_{12}) som radmatrisen $(a_{11} \;\; a_{12})$ och (x_1, x_2) som kolonnmatrisen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Lämpligen definierar vi då en matrismultiplikation genom

$$(a_{11} \;\; a_{12}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv (a_{11}, a_{12}) \cdot (x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2. \tag{2.3}$$

Ett ekvationssystem med två ekvationer som i (2.1) kan vi alltså skriva m h a matriser om vi definierar matrisprodukt av $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ enligt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{12}) \cdot (x_1, x_2) \\ (a_{21}, a_{22}) \cdot (x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Vi ser alltså att för f definierad av (2.2) kan vi skriva $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alltså kan vi skriva ekvationssystemet (2.1) som

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eller

$$Ax = b$$

där $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Från fallet med två rader i koefficientmatrisen ser vi att vi kan ge mening även åt fallet med fler än två rader; vi gör bara likadant för ytterligare rader. Frågan blir hur matrisprodukten Ax ska definieras om vi har fler kolonner i x.

Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Vi studerar sammansättningen av $f(x_1, x_2) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och $g(x_1, x_2) = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Då gäller $f(g(x_1, x_2)) =$

$$= A\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vi har alltså $A\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ där

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

och det blir naturligt att definiera

$$AB \equiv C.$$

Vidare noterar vi att kolonnerna i C ges av

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Vi ser alltså att den naturliga definitionen av matrismultiplikation är

$$AB = \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

d v s vi upprepar definitionen av A matrismultiplicerad (från höger) med en kolonnmatris, för var och en av kolonnerna i B; schematiskt har vi

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}\underset{j}{\overset{B}{\begin{pmatrix} \quad & \vert & \quad \\ & \vert & \\ & \vert & \end{pmatrix}}} = \underset{j}{\overset{AB}{\begin{pmatrix} \quad & \vert & \quad \\ & \vert & \\ & \vert & \end{pmatrix}}} \tag{2.4}$$

d v s kolonn j för AB är A ggr kolonn j för B, där vi med ggr menar skalärmultiplikation mellan raderna i A och kolonnen j för B. Här har vi ju i vårt exempel använt oss av A och B som 2×2-matriser. Vi har dock sett hur man generaliserar detta till situationer med fler rader i A och fler kolonner i B. Detta går ju bra eftersom radernas längd i A och kolonnernas längd i B ej påverkas. Så vi kan alltså definiera produkten AB om A är $m \times 2$-matris och B $2 \times \ell$-matris och resultatet blir en $m \times \ell$-matris. Denna situation kan vi nu utvidga till situationen när A $m \times n$-matris och B $n \times \ell$-matris. Situationen år helt analog; det enda vi behöver göra är att utvidga skalärprodukten från $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ till ett godtyckligt $\mathbb{R}^n$:

Definition 2.4. *Låt* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Vi definierar då* skalärprodukten *av* x *och* y *som*

$$x \cdot y \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Vi har nu matrismultiplikation av matriser A och B där A $m \times n$-matris och B $k \times \ell$-matris, i de fall då $n = k$. Om $n \neq k$ så är matrisprodukten av A och B *ej* definierad.

Exempel 2.5. Låt

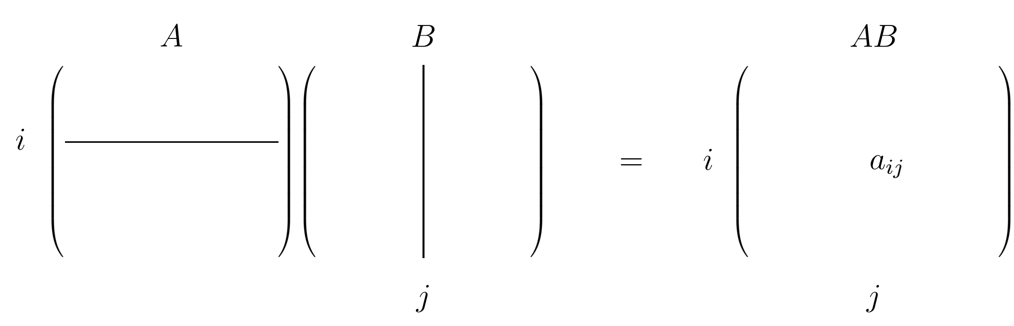
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då är BA ej definierat och $AB = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 25 \\ 11 & 2 & 34 \end{pmatrix}$. □

Låter vi $A_{ij} = a_{ij}$ där alltså a_{ij} är elementet för en $m \times n$-matris A på rad i och kolonn j och $B_{ij} = b_{ij}$, B en $n \times k$-matris, så har vi alltså att AB är definierat och är en $m \times k$-matris och för $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k$ gäller

$$(AB)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} = A_{\text{rad } i} \cdot B_{\text{kolonn } j}$$

och schematiskt har vi



Utför vi nu skalärmultiplikation mellan en fix rad, säg rad i, för A och kolonnerna i B så får vi alltså rad i för AB, d v s schematiskt har vi:

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\overset{A}{\begin{pmatrix} \\ \rule{3cm}{0.4pt} \\ \\ \end{pmatrix}}\overset{B}{\begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\overset{AB}{\begin{pmatrix} \\ \rule{3cm}{0.4pt} \\ \\ \end{pmatrix}}$$

Exempel 2.6. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 15/2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -5/2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Då är $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $BA = \begin{pmatrix} -20 & -50 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$ så $AB \neq BA$. Vi har alltså att matrisprodukt *ej* är kommutativ i allmänhet. Dessutom gäller att $AB = 0$ *utan* att någon av faktorerna A och B är 0. $\square$

Exempel 2.7. Antag att matriserna A och B är sådana att produkterna AB och BA är definierade. Antag också att $AB = BA$. Vi visar nu att då måste matriserna A och B vara kvadratiska av samma typ. Antag att A är av typ $m \times n$ och B av typ $k \times \ell$. Då AB definierad så måste $n = k$ och då BA definierad så måste $\ell = m$ $\therefore$ AB är en $m \times \ell$-matris och BA är en $k \times n$-matris. Då dessa är lika så måste $m = k,\ \ell = n$ $\therefore$ $n = \ell = m = k$, så A och B är kvadratiska av samma typ. $\square$

Vi definierade i (2.3), som ett första steg i definitionen av matrismultiplikation, produkten av en rad (med två element) och en kolonn (med två element)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Vi utvidgade sedan definitionen av matrisprodukt respektive skalärprodukt så att

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = x \cdot y$$

där n godtyckligt heltal ≥ 1. Det vore smidigt att kunna skriva denna matrisprodukt med en kortare notation precis som för skalärprodukt; $x \cdot y$.

OBS: Vårt föredragna sätt att skriva ett element $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som en matris är att skriva det som en kolonnmatris. Om inget annat anges underförstår vi att denna konvention används.

Definition 2.5. *Låt A vara en $m \times n$-matris. Då definieras* transponatet *av A, betecknat A^t, som den $n \times m$-matris som fås genom*

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}.$$

Transponatet byter alltså rader mot kolonner.

Exempel 2.8. Transponatet ger oss alltså den ovan eftersökta möjligheten att skriva skalärprodukt som en matrismultiplikation med en enkel beteckning. För $x, y \in \mathbb{R}^n$ har vi (med konventionen att skriva ett element i $\mathbb{R}^n$ som en kolonnmatris) att

$$x^t y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x \cdot y$$

□

Exempel 2.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

□

Övning 2.2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna om möjligt följande. a) $D + E$, b) $2B - C$, c) $-3(D + 2E)$, d) $A - A$, e) $F - G$.

Övning 2.3. Beräkna om möjligt för matriserna i övning (2.2). a) $2A^t + C$, b) $B^t + 5C^t$, c) $\frac{1}{2}C^t - \frac{1}{4}A$, d) $2E^t - 3D^t$, e) $(2E^t - 3D^t)^t$, f) $B - B^t$.

Övning 2.4. Beräkna om möjligt för matriserna i övning (2.2). a) AB, b) BA, c) $(3E)D$, d) $(AB)C$, e) $A(BC)$, f) CC^t, g) $(DA)^t$, h) $(C^t B)A^t$, i) FG, j) GF, k) FG^t.

Övning 2.5. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Finn a) första raden i AB, b) tredje raden i AB, c) andra kolonnen i AB, d) första kolonnen i BA, e) tredje raden i AA, f) tredje kolonnen i AA.

Övning 2.6. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Lös matrisekvationen $Ax = b$ genom att använda inversen A^{-1}.

Övning 2.7. Bestäm alla matriser som kommuterar med $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Definition 2.6. *En* enhetsmatris *eller* identitetsmatris *är en kvadratisk matris med ettor på huvuddiagonalen och nollelement för övrigt. Vi betecknar enhetsmatriser med I eller E, då det i allmänhet framgår av situationen vilken typ hos enhetsmatrisen som avses.*

Exempel 2.10. Matriserna $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ är enhetsmatriser och allmänt

är enhetsmatriser av formen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Följande sats samlar räkneregler för matrismultiplikation. Notera att det är underförstått att räknereglerna bara gäller när operationerna är definierade. Alla räknereglerna gäller i den meningen att om ett av leden i en likhet existerar så existerar också det andra ledet. Observera också att enhetsmatrisen som förekommer i *ii)* respektive *iii)* ej behöver vara samma; matrisen A behöver ju ej vara kvadratisk.

Sats 2.7. *Låt A, B och C vara matriser och låt I vara enhetsmatris. Då gäller*

i) $(AB)C = A(BC)$

ii) $IA = A$

iii) $AI = A$

iv) $(AB)^t = B^t A^t$

v) $A(B + C) = AB + AC$

vi) $(B + C)A = BA + CA$

Bevis. Beviset är likartat för satsens alla delar och rättframt. Vi bevisar endast *iv)*. Det är med ett liknande resonemang som gjordes ovan då det visades att om två matriser kommuterar så är de kvadratiska, inte svårt att visa att $(AB)^t$ och B^tA^t är av samma typ. Vidare är

$$\left((AB)^t\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}$$

och

$$(B^tA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B^t_{ik}A^t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk},$$

d v s $\left((AB)^t\right)_{ij} = (B^tA^t)_{ij}$, vilket avslutar beviset. ∎

Notera att *i)* är en associativ lag och innebär att i en produkt ABC behöver vi inte sätta ut paranteser för att markera vilka två som ska multipliceras först då ju resultatet blir detsamma vilket vi än gör. Detta gör ju att för en kvadratisk matris A så kan vi definiera A^n där n positivt heltal. Det är helt enkelt produkten av A med sig självt n gånger i någon ordning; vilken spelar ingen roll resultatet blir detsamma.

Övning 2.8. Visa att $(ABC)^t = C^tB^tA^t$.

Övning 2.9. Antag att A och B är kvadratiska matriser av samma typ. Visa att då gäller $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Övning 2.10. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna $A^{19}B^{68}C^{107}$.

2.3. Invers matris

Vi betraktar en ekvation

$$ax = b \tag{2.5}$$

där $a, b \in \mathbb{R}$. Om $a \neq 0$ så kan vi multiplicera ekvationen med $a^{-1} = \frac{1}{a}$ och får då lösningen x genom $x = a^{-1}ax = a^{-1}b$.

Vi har ju ovan sett att ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer och n obekanta med hjälp av matrisformulering kan skrivas som

$$Ax = b \tag{2.6}$$

där A är koefficientmatrisen, x variabelmatrisen (eller variabelkolonnen, som ju är en matris) och b högerledsmatrisen (eller högerledskolonnen). Detta är ju, åtminstone ytligt sett, ett uttryck precis på formen (2.5).

Man leds naturligen till frågan om det finns någon matris B så att $BA = I$ där I är en identitetsmatris. Om det finns en sådan matris B så får vi alltså, helt i analogi med lösningen i fallet av (2.5), att för x i (2.6) gäller

$$x = Ix = BAx = Bb.$$

En sådan eventuell matris B är tydligen av värde och vi gör följande definition.

Definition 2.8. *En matris B sådan att*

$$AB = BA = I$$

kallas en invers *till A. Om det finns en sådan matris B så säger vi att matrisen A har en invers och att matrisen A är* inverterbar.

Vi noterar att om A har en invers så måste A vara kvadratisk ty vi har ju att $AB = BA$ och vi kan då argumentera som i exempel (2.7). Vi ser även från det exemplet att matrisen B är av samma typ som A, d v s den är också kvadratisk.

Vi tänkte oss ovan i ekvationssystemet givet av (2.5) att det var m rader och n obekanta. Vi ser dock att i det fallet så fungerar inte vår lösningsstrategi med invers ty vår definition av invers kräver att koefficientmatrisen är kvadratisk, d v s $m = n$. Vi ser vidare att vi egentligen för att få fram lösningen x då bara multiplicerar med B från vänster. Det är därför av värde att införa vänsterinvers och högerinvers till A. En vänsterinvers är naturligen en matris B sådan att $BA = I$ och en högerinvers C är en matris sådan att $AC = I$. Då kan A ha både vänsterinvers och högerinvers utan att vara kvadratisk men om dessa höger- repektive vänsterinverser är lika så har ju A en invers och är därmed kvadratisk. Vi fördjupar oss dock inte i det här med vänsterinverser och högerinverser utan pratar bara om invers.

Sats 2.9. *Om A är inverterbar så är inversen entydig. Den betecknas A^{-1}.*

Bevis. Det finns minst en invers till A för vi har ju antagit att A är inverterbar, d v s att det finns en invers. Vi vill visa att det finns precis en invers. Det har vi visat om vi kan visa att det också kan finnas högst en invers. Antag motsatsen, d v s antag att det finns två eller fler inverser. Låt B och B' vara sådana. Då gäller enligt definitionen av invers bl a att $AB = I$ och $B'A = I$. Multiplicera nu $B'A = I$ med B från höger så att vi får $B'AB = IB = B \Rightarrow B'(AB) = B \Rightarrow B'I = B$ ty $AB = I$. D v s vi har $B' = B'I = B$. Så vårt antagande att det fanns två eller fler inverser var fel. Vi har alltså visat att det finns högst en invers och detta bevisar alltså satsen.

Vi noterar att detta går att uttrycka mycket kortare: B, B' inverser till $A \Rightarrow AB = I,\ B'A = I \ \therefore B'A = I \Rightarrow (B'A)B = IB \Rightarrow B'(AB) = B \Rightarrow B'I = B \Rightarrow B' = B$. ■

Vi noterar i följande sats bl a det som motiverade oss att införa begreppet invers.

Sats 2.10. *Om A inverterbar så gäller att*

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Bevis. $\Rightarrow$): $Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$
$\Leftarrow$): $x = A^{-1}b \Rightarrow Ax = AA^{-1}b \Rightarrow Ax = Ib \Rightarrow Ax = b$ ■

Användbara räknelagar för invers ges i följande sats vars bevis vi lämnar som övning.

Sats 2.11. *Om A och B är inverterbara och av samma typ så är produkten AB inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Övning 2.11. Bevisa Sats 2.11.

Sats 2.12. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Övning 2.12. Bevisa Sats 2.12.

Frågan blir nu hur vi avgör om en matris A har en invers och hur vi, om A har en invers, finner den. Antag först att A har en invers A^{-1}. Då gäller enligt maltrismultiplikationen i (2.4) att

$$\begin{array}{cccc} A & A^{-1} & & I \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & | & \\ & | & \\ & | & \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} & | & \\ & | & \\ & | & \end{pmatrix} \\ & j & & j \end{array} \tag{2.7}$$

Låt för $1 \leq k \leq n$, X_k och I_k vara kolonnerna i A^{-1} respektive I så att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ I_1 & I_2 & \dots & I_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Då gäller alltså enligt (2.7) att

$$AX_k = I_k$$

och vi finner X_k genom att lösa detta ekvationssystem, d v s lösa

$$(A|I_k)\,,$$

d v s utföra elementära radoperationer så att

$$(A|I_k) \overset{RE}{\sim} \ldots \overset{RE}{\sim} (I|Y_k)\,.$$

Vi får alltså att lösningen X_k ges av högerledet Y_k i $(I|Y_k)$ som är radreduceringen av totalmatrisen $(A|I_k)$. Då vi för varje högerled I_k, för att finna lösningen X_k, ska lösa $(A|I_k)$ så blir det samma radekvivalenser som utförs för att överföra koefficientmatrisen A till enhetsmatrisen I, för samtliga av dessa lösningar X_k, $1 \leq k \leq n$. Alltså kan vi utföra dessa radekvivalenser samtidigt för alla högerleden I_k genom att sätta dem som succesiva kolonner i högerledet, d v s vi sätter som högerled alla högerleden på en gång och får då enhetsmatrisen I som högerled.

Vi ser alltså att genom

$$(A|I) \overset{RE}{\sim} \ldots \overset{RE}{\sim} \big(I|\ X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_n\ \big) = \big(I|A^{-1}\big)\,,$$

finner vi inversen A^{-1}, i det fall som matrisen A har en invers. I det fallet vet vi ju att det existerar lösningar X_k till $(A|I_k)$ och det är alltså detsamma som att säga att det går att via elementära radoperationer överföra koefficientmatrisen A i $(A|I)$ till enhetsmatris. Om inte detta går finns alltså inga lösningar X_k och alltså ingen invers.

Denna metod att finna inversen eller se att en invers inte existerar kallas *Jacobis metod.*

Exempel 2.11. Låt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och antag att $D \equiv ad - bc \neq 0$. Jacobis metod ger nu att $\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{a} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right) \begin{array}{c}\boxed{-c} \\ \leftarrow\end{array} \overset{RE}{\sim}$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) \boxed{1/D} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) \begin{array}{c}\leftarrow \\ \boxed{-b}\end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+(bc/D) & -(ab/D) \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) \boxed{1/a} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (D+bc)/aD & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right) =$$

$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array}\right)$, så $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Observera att i de gjorda räkningarna har vi antagit att förutom D så är, t ex, $a \neq 0$. Vi ser dock att i slutresultatet så behöver vi inga extra villkor förutom $D \neq 0$ för att det erhållna uttrycket för A^{-1} ska vara definierat. En multiplikation av A med detta A^{-1} ger att detta uttryck verkligen är inversen till A, utan några andra villkor än $D \neq 0$, (även om vi tvingades anta extra villkor då vi fann ett uttryck för A^{-1}). □

Vi formulerar detta resultatet som en sats.

Sats 2.13. *Låt* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *och antag att* $D \equiv ad-bc \neq 0$. *Då har* A *en invers* $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exempel 2.12. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Jacobis metod ger

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \boxed{-2}\ \boxed{-1} \\ \leftarrow \\ \qquad\leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \boxed{2} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{r} \leftarrow \\ \leftarrow\quad \\ \boxed{-1}\,\boxed{3}\,\boxed{-3} \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow \\ \boxed{-2} \\ \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad \therefore A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \square$$

Exempel 2.13. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Jacobis metod ger

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \boxed{-2}\ \boxed{1} \\ \leftarrow \\ \qquad\leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \boxed{1} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim}$$

$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Vi har alltså fått en rad med nollor i koefficientmatrisen A i $(A|I)$ så A kan ej via elementära radoperationer överföras till en enhetsmatris; d v s A har ingen invers. $\Box$

Övning 2.13. Finn med Jacobis metod inversen till följande matriser eller visa att inversen inte existerar. a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Övning 2.14. Finn med Jacobis metod inversen till följande matriser eller visa att inversen inte existerar, a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} -8 & 17 & 2 & 1/3 \\ 4 & 0 & 2/5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Övning 2.15. Antag att k_1, k_2, k_3, k_4 och k alla är nollskilda. Finn inversen till följande matriser, a) $\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$.

Exempel 2.14. Vi låter $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och löser matrisekvationen

$$2XB - AXB = C$$

Vi har att $2XB - AXB = C \Leftrightarrow 2IXB - AXB \Leftrightarrow (2I - A)XB = C$, där I är identitetsmatrisen av typ 3×3. Genom användande av Jacobis metod ser vi att $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ och $(2I - A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Vi får då genom multiplikation av $(2I - A)XB = C$ med $(2I - A)^{-1}$ *från vänster* och med B^{-1} *från höger* att

$$X = (2I - A)^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 28 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Övning 2.16. Lös för X matrisekvationen $AXB + 2AX = C$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Förslag till svar

Kapitel 1

1. a) Inga lösningar b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
d) $x = s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) Inga lösningar f) $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3/5 \\ 2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3/5 \\ -1/10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Om $a = 2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; om $a \neq 2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

Ja, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Om $a \neq 8$ har systemet entydig lösning för alla $b \in \mathbb{R}$; om $a = 8$ så finns ingen lösning om $b \neq 8$ och om $a = b = 8$ ges de oändligt många lösningarna av $(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-25/11, 13/11, 1)$

4. a,c,d

5. a) 2 b) 4 c) 3 d) 2 (om $x = -10/3$), 3 (om $x \neq -10/3$) e) 2

6. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ om $x \neq y$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ om $x = y$

Kapitel 2

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, d) $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}$,

2. a) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, b) ej definierat, c) $\begin{pmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) ej definierat

3. a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, b) ej definierat, c) $\begin{pmatrix} -1/4 & 3/2 \\ 9/4 & 0 \\ 3/4 & 9/4 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}^t$, f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) ej definierat, c) $\begin{pmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$, e) samma som i d), f) $\begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & -3 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, j) ej definierat, k) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{pmatrix} 67 & 41 & 41 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 63 & 67 & 57 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 24 & 56 & 97 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix}$

6. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

10. A

13. a) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) ej inverterbar

14. a) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 15 & -11 & -12 \\ -10 & 10 & 10 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

d) ej inverterbar e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{44}\begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 & 0 \\ 20 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ h) $\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ i) ej inverterbar

j) $\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

15. a) $\begin{pmatrix} 1/k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/k_4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/k_1 \\ 0 & 0 & 1/k_2 & 0 \\ 0 & 1/k_3 & 0 & 0 \\ 1/k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 & 0 \\ -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0 \\ -1/k^4 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k \end{pmatrix}$

16. $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$