Lösningar till tentamen i Matematiska metoder E1 (TMA042), del B, 1998-12-18

1. Sätt först $w = e^z$. Division med $9j$ och kvadratkomplettering ger då

$$w^2 - \tfrac{j}{3}w = \tfrac{1-j}{9} \quad \Leftrightarrow \quad (w - \tfrac{j}{6})^2 = \tfrac{1-j}{9} + \tfrac{j^2}{36} = \tfrac{3-4j}{36}.$$

Bestäm nu $a + jb$ så att $(a+jb)^2 = a^2 - b^2 + 2jab = 3 - 4j$. Identifikation av real- och imaginärdelar ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ b = -2/a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = -2/a \end{cases}$$

Första ekvationen ger $a^2 = -1$, som är orimligt, eller $a^2 = 4$, varav $a = \pm 2$ och $b = \mp 1$. Detta ger

$$\big(w - \tfrac{j}{6}\big)^2 = \big(\tfrac{2-j}{6}\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad w = \tfrac{j}{6} \pm \tfrac{2-j}{6} \quad \Leftrightarrow \quad w_1 = \tfrac{1}{3},\ w_2 = \tfrac{j-1}{3}$$

Det återstår nu att bestämma z ur $e^z = w$. Om $z = x + jy$ och $w = re^{j\theta}$ så ger $e^z = w$ att

$$e^x e^{jy} = rej\theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x = r \\ y = \theta + j2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = x + jy = \ln r + j(\theta + 2\pi n),$$

så med $w_1 = \frac{1}{3}e^{j0}$ och $w_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{j3\pi/4}$ får vi

$$z = -\ln 3 + j2\pi n \quad \text{resp} \quad z = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{2}{9} + j(\tfrac{3\pi}{4} + 2\pi n).$$

2. Ekvationen, som kan skrivas $y' + e^x y = e^{2x}$, är linjär av första ordningen. En integrerande faktor är

$$e^{\int e^x\,dx} = e^{e^x},$$

och multiplikation med denna ger

$$\frac{d}{dx}(e^{e^x}y) = e^{2x}e^{e^x},$$

varav

$$e^{e^x}y = \int e^{2x}e^{e^x}\,dx = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int te^t\,dt = [\mathrm{PI}]$$
$$= te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C = e^x e^{e^x} - e^{e^x} + C$$

Vi får alltså $y = e^x - 1 + Ce^{-e^x}$. Bivillkoret $y(0) = 1$ ger slutligen $C = e$, dvs

$$y = e^x - 1 + e^{1-e^x}.$$

3. Låt $V = \{\text{vatten finns}\}$ och $F = \{\text{fjärranalysen ger utslag}\}$. Bayes formel ger då

$$P(V|F) = \frac{P(F|V)P(V)}{P(F|V)P(V) + P(F|V^c)P(V^c)} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.9} = 0.25 = 25\%.$$

4. a) Konditionstalet ges av

$$\kappa = \frac{|(f(x+h)-f(x))/f(x)|}{|h/x|} \approx \left|\frac{hf'(x)/f(x)}{h/x}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{ax}{ax+b}\right|,$$

som är stort då $ax+b \approx 0$, dvs $x \approx -b/a$.

b) Vid flyttalsberäkning fås

$$\hat{f}(x) = \big(ax(1+r_1)+b\big)(1+r_2) = a(1+r_1)(1+r_2)x + b(1+r_2) = \hat{a}x + \hat{b},$$

där $\hat{a} = a(1+r_1)(1+r_2)$, $\hat{b} = b(1+r_2)$, och $|r_1|, |r_2| \le \varepsilon_{\mathrm{mach}}$. De relativa felen i $\hat{a}$ och $\hat{b}$ blir då

$$\left|\tfrac{\hat{a}-a}{a}\right| = |r_1 + r_2 + r_1 r_2| \lesssim 2\varepsilon_{\mathrm{mach}} \quad \text{resp} \quad \left|\tfrac{\hat{b}-b}{b}\right| = |r_2| \le \varepsilon_{\mathrm{mach}}.$$

5. Karakteristiska ekvationen är $r^4 + 2r^3 + 7r^2 + 6r + 12 = 0$. En ren sinussvängning i homogenlösningen svarar mot en rent imaginär rot till den karakteristiska ekvationen. Insättning av $z = jb$, $b \in \mathbb{R}$, ger

$$b^4 - 2jb^3 - 7b^2 + 6jb + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b^4 - 7b^2 + 12 = 0 \\ -2b^3 + 6b = 0 \end{cases}.$$

Andra ekvationen ger $b = 0$, som ej löser första ekvationen, eller $b = \pm\sqrt{3}$, som gör det. Vänsterledet i den karakteristiska ekvationen är alltså delbart med $(r - j\sqrt{3})(r + j\sqrt{3}) = r^2 + 3$, och polynomdivision ger $(r^2+3)(r^2+2r+4) = 0$, varav $r_{1,2} = \pm j\sqrt{3}$ och $r_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$. Homogenlösningen blir då

$$y_h = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + e^{-x}(C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x).$$

För att finna en partikulärlösning ansätter vi $y_p = ze^{-x}$ och sätter in i ekvationen. Heavisides förskjutningsregel ger sedan

$$e^{-x}\big((D-1)^4 + 2(D-1)^3 + 7(D-1)^2 + 6(D-1) + 12\big)z = xe^{-x}$$
$$(D^4 - 2D^3 + 7D^2 - 6D + 12)z = x.$$

Ansatsen $z = ax + b$ ger

$$-6a + 12ax + 12b = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12a = 1 \\ -6a + 12b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1/12 \\ b = 1/24 \end{cases},$$

dvs $y_p = (\frac{1}{12}x + \frac{1}{24})e^{-x}$. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är således

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + e^{-x}(C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x + \tfrac{1}{12}x + \tfrac{1}{24}).$$

6. Man ser direkt att f är styckvis kontinuerlig och att $f(x) \ge 0$ om $a \ge 0$. Vidare skall vi ha $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_0^{\infty} e^{-x}\sin^2 x\,dx = 1$. Nu är

$$\int e^{-x}\sin^2 x\,dx = \int e^{-x}\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \int \tfrac{1}{2}e^{-x}(1 - \operatorname{Re} e^{j2x})\,dx$$
$$= \operatorname{Re}\int \tfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{(-1+2j)x})\,dx = \operatorname{Re}\tfrac{1}{2}\big(-e^{-x} - \tfrac{e^{(-1+2j)x}}{-1+2j}\big)$$
$$= \operatorname{Re}\tfrac{1}{2}e^{-x}\big(-1 + \tfrac{1+2j}{5}(\cos 2x + j\sin 2x)\big) = \tfrac{1}{10}e^{-x}(-5 + \cos 2x - 2\sin 2x),$$

så

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx = \Big[-\tfrac{1}{10}e^{-x}(-5+\cos 2x - 2\sin 2x)\Big]_0^\infty$$
$$= \lim_{x\to\infty} -\tfrac{1}{10}e^{-x}(-5+\cos 2x - 2\sin 2x) - (-\tfrac{4}{10}) = 0 + \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{5},$$

och alltså $a = \frac{5}{2}$.

Väntevärdet av en stokastisk variabel X med frekvensfunktionen f är

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^\infty \tfrac{5}{2}xe^{-x}\sin^2 x\,dx.$$

Även denna integral kan beräknas som realdelen av en komplexvärd integral:

$$\int \tfrac{5x}{2}e^{-x}\sin^2 x\,dx = \mathrm{Re}\int \tfrac{5x}{4}\big(e^{-x} - e^{(-1+2j)x}\big)\,dx = [\mathrm{PI}]$$
$$= \mathrm{Re}\Big(\tfrac{5x}{4}\big(-e^{-x} - \tfrac{e^{(-1+2j)x}}{-1+2j}\big) + \int \tfrac{5}{4}\big(e^{-x} + \tfrac{e^{(-1+2j)x}}{-1+2j}\big)\,dx\Big)$$
$$= \mathrm{Re}\Big(\tfrac{5x}{4}\big(-e^{-x} - \tfrac{e^{(-1+2j)x}}{-1+2j}\big) + \tfrac{5}{4}\big(-e^{-x} + \tfrac{e^{(-1+2j)x}}{(-1+2j)^2}\big)\Big)$$
$$= \mathrm{Re}\,\tfrac{5}{4}e^{-x}\Big(-x-1+\big(\tfrac{1+2j}{5}x + \tfrac{4j-3}{25}\big)(\cos 2x + j\sin 2x)\Big)$$
$$= \tfrac{1}{20}e^{-x}\big((5x-3)\cos 2x - (10x+4)\sin 2x - 25x - 25\big),$$

vilket ger

$$E[X] = [\ldots]_0^\infty = \cdots = 0 - (-\tfrac{28}{20}) = \tfrac{7}{5}.$$